

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Код и наименование дисциплины:	Б.1.О.21 Теоретическая и прикладная механика
Специальность (направление подготовки):	23.03.01 Технология транспортных средств
Специализация (профиль):	Технология и организация транспортных и транспортно-логистических процессов и систем

Критерии оценивания и шкала оценивания (по четырехбалльной и бинарной системе) по видам оценочных средств

Наименование оценочного средства	Форма контроля	НЕЗАЧТЕН О	ЗАЧТЕНО		
		неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
Практическая работа	Текущий контроль	работа выполнена не полностью, допущены грубые ошибки, большинство предусмотренных заданий не выполнены либо выполнены с грубыми ошибками	выполнена большей частью, но допущены ошибки в расчетах и чертежах (графиках); необходимые умения и практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки; оформление РГР с нарушением установленных требований	работа в целом выполнена, но допущены неточности в расчетах и чертежах (графиках), теоретическое содержание освоено; необходимые умения и практические навыки работы в основном сформированы, все предусмотренные задания выполнены с отдельными неточностями, оформление РГР согласно установленным требованиям.	работа выполнена в полном объеме; без ошибок в расчетах и чертежах (графиках), теоретическое содержание освоено полностью, без пробелов, системно и глубоко; необходимые умения и практические навыки сформированы, все задания выполнены безупречно, оформление РГР согласно установленным требованиям.
Реферат	Текущий контроль	Тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы	Имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод	Основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы, наличие презентации	Выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы, наличие презентации
Экзамен	Промежуточная	Незнание или непонимание	Знания имеют фрагментарный	Знания имеют достаточный	Знания отличаются глубиной и

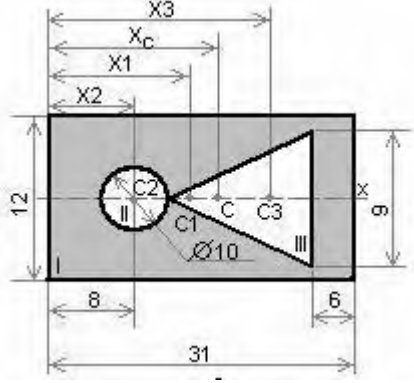
	аттестация	обучающимся основного материала; на большую часть вопросов по содержанию экзамена затрудняется дать ответ или не дает верных ответов	характер, отличаются поверхностность ю и малой содержательность ю; содержание билета раскрыто слабо, имеются неточности при ответе на основные вопросы билета; нарушена логика изложения, отсутствует осмысленность представляемого материала	содержательный уровень, однако отличаются слабой структурированно стью; раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе на дополнительные вопросы; недостаточно раскрыта проблема по одному из вопросов билета	содержательностью, дается полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные; обучающийся свободно владеет научными понятиями; логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете; демонстрирует умение вести диалог и вступать в научную дискуссию
--	------------	---	--	---	--

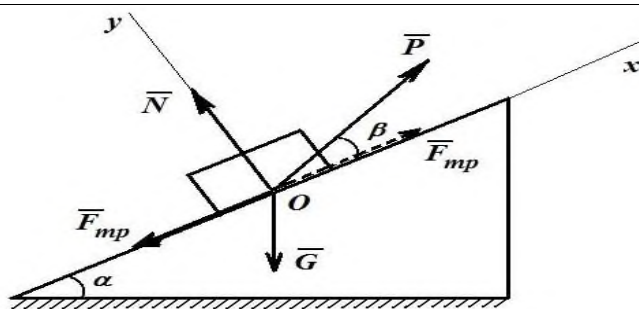
Задания для выполнения практической работы

Контролируемые компетенции

ОПК-5. Способен принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности	ОПК-5.3.1 эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.У.1 принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.В.1 выбором эффективных и безопасных технических средств и технологии при решении задач профессиональной деятельности
---	---

Наименование раздела (темы)	Темы практической работы
Тема 1.2 Формы уравнений равновесия. Равновесие системы тел.	Задание: Определение реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь. Пользуясь законами сопротивления материалов, рассчитать прочность конструкции или сооружения.
Тема 1.3 Плоская система сил	Задание: Определить реакции опор балки.

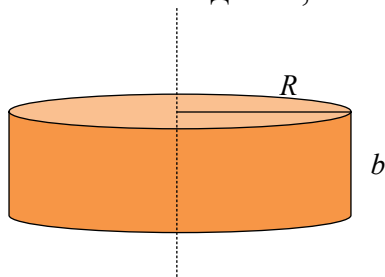
Тема 1.5 Пространственная система сил. Центр тяжести	Задание: Определить положение центра тяжести для тонкой однородной пластины, форма и размеры которой, в сантиметрах, показаны на рисунке. 
Тема 1.7. Кинематика точки. Простейшие движения твердого тела	Задание: Даются уравнения движения точки: 1. Определить уравнение траектории и построить ее. 2. Определить начальное положение точки на траектории. 3. Указать моменты времени, когда точка пересекает оси координат. 4. Найти закон движения точки по траектории $s = s(t)$, принимая за начало отсчета расстояний начальное положение точки. 5. Построить график движения точки.
Тема 1.8 Сложное движение точки и твердого тела	Задание: По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории для определенного момента времени. Найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.
Тема 1.9. Основные понятия и аксиомы динамики. Понятие о трении Равновесие с учетом трения	Задание: Тело весом $G = 100\text{Н}$ удерживается в равновесии на шероховатой наклонной плоскости силой P, действующей под углом $\beta = 15^\circ$ (рисунок). Угол наклона плоскости $\alpha = 45^\circ$, коэффициент трения между телом и плоскостью $f = 0,1$. Определить величину силы P при равновесии тела на шероховатой наклонной плоскости.



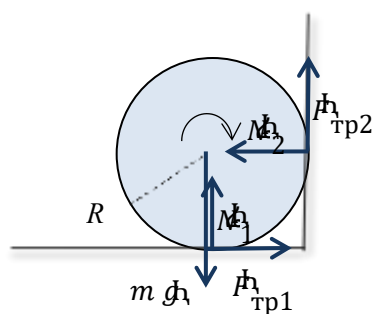
Тема 1.11
Общие теоремы
динамики

Задание:

1. Вычислить момент инерции медного однородного диска относительно оси симметрии, перпендикулярной к плоскости диска, если его толщина b и радиус R .



2. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?



Рефераты

Контролируемые компетенции

ОПК-5. Способен принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности	ОПК-5.3.1 эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.У.1 принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.В.1 выбором эффективных и безопасных технических средств и технологии при решении задач профессиональной деятельности
--	---

Наименование темы	Темы рефератов
Тема 2.3. Растяжение и сжатие	1. Физические свойства материалов при растяжении и сжатии. 2. Механика деформируемого твердого тела: одноосное напряженное состояние. 3. Закон Гука и его применение для различных материалов. 4. Коэффициент Пуассона и деформации продольные/поперечные. 5. Расчеты на прочность при растяжении/сжатии конструкций. 6. Испытания материалов: диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов. 7. Допускаемые напряжения и коэффициенты запаса прочности. 8. Методики построения эпюр нормальных сил и напряжений. 9. Влияние деформаций на механические характеристики современных композитов. 10. Усталостная прочность материалов при циклическом нагружении. 11. Чистый сдвиг как частный случай сложного напряженного состояния.

Тема 2.7. Кручение	1. Физическая природа кручения как механического явления. 2. Чистый сдвиг и закон Гука при сдвиге: модуль сдвига. 3. Внутренние силовые факторы при кручении эпюры крутящих моментов. 4. Кручение бруса круглого поперечного сечения: теория напряжений. 5. Угол закручивания и потенциальная энергия деформации. 6. Условия прочности и жесткости при кручении конструкций. 7. Испытание материалов на кручение: диаграммы механических характеристик. 8. Расчет цилиндрических винтовых пружин малого шага. 9. Применение кручения в машиностроении (валы машин, сверла). 10. Анализ болтовых и заклепочных соединений под действием кручения. 11. Сочетанный изгиб и кручение валов: сложные случаи нагружения.
Тема 2.8. Прямой изгиб	1. Физическая сущность и геометрическое описание прямого изгиба. 2. Различие между чистым и поперечным изгибом: внутренние силовые факторы. 3. Гипотеза плоских сечений при деформации изгиба. 4. Напряженное состояние в точке: нормальные и касательные напряжения. 5. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. 6. Дифференциальные зависимости для проверки правильности эпюр. 7. Условие прочности при изгибе и подбор оптимальных сечений балок. 8. Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе. 9. Наиболее экономичные формы поперечных сечений балок. 10. Метод начальных параметров для вычисления перемещений. 11. Продольный изгиб и устойчивость сжатых стержней (на примере швейной иглы). 12. Сложные виды нагружения: сочетание изгиба с кручением или растяжением.

Экзамен

Контролируемые компетенции

ОПК-5. Способен принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности	ОПК-5.3.1 эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.У.1 принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности ОПК-5.В.1 выбором эффективных и безопасных технических средств и технологии при решении задач профессиональной деятельности
---	---

Перечень вопросов

1. Какие внутренние усилия (внутренние силовые факторы) могут возникать в поперечных сечениях стержней и какие виды деформаций с ними связаны?
2. Что такое нормальные, касательные и полные напряжения? Какова их размерность?
3. В чем заключается принцип независимости действия сил, гипотеза плоских сечений, принцип Сен-Венана?
4. Как используется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) для выяснения закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня?
5. Что такое предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности? Что такое площадка текучести?
6. Чем отличается диаграмма растяжения пластичной стали от диаграммы хрупкой стали? Что такое условный предел текучести? Для каких материалов определяется эта характеристика?

7. Чем отличается диаграмма сжатия чугуна от диаграммы растяжения?

8. Как формулируется закон Гука? Напишите формулы абсолютной и относительной продольной деформации?

9. Что означают физические константы материала – модуль продольной упругости E , коэффициент Пуассона?

10. В чем состоит расчет на прочность (три вида расчета) и жесткость при растяжении-сжатии? Как определяют допускаемые напряжения для пластичных и хрупких материалов?

11. Как раскрыть статическую неопределимость стержня при растяжении и сжатии (на примере)?

12. Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения? Размерность статического момента?

13. Как определяют момент инерции поперечного сечения? Размерность момента инерции сечения? Моменты инерции прямоугольного, треугольного, круглого и кольцевого сечения.

14. Как вычислить момент инерции и центробежный момент инерции сечения при параллельном переносе осей (теорема Штейнера)?

15. Какие оси инерции называют главными? В каких случаях можно без вычислений определить положение главных осей?

16. Написать выражения для полярных моментов инерции круглого и кольцевого сечения? Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он измеряется и чему равен (для круга и кольца)?

17. В чем состоит расчет на прочность и жесткость при кручении? Чему равны допускаемые касательные напряжения?

18.Как раскрыть статическую неопределимость крутящего вала (на примере)?

19.Вывод формулы Журавского.

20.В чем состоит расчет на прочность и жесткость при изгибе? Какое положение поперечного сечения относительно главных центральных осей позволяет снизить максимальные нормальные напряжения при изгибе?

21.Какие напряжения называют главными? Как определяют главные напряжения в случае плоского напряженного состояния?

23.Сформулируйте третью теорию прочности. Для каких материалов она применяется?

24.Чему равны экстремальные касательные напряжения в случае плоского напряженного состояния?

25.Косой изгиб. Как записать условие прочности и определить положение нейтральной линии?

26.Внецентренное растяжение-сжатие (сжатие с изгибом). Как записать условие прочности и определить положение нейтральной линии?

27.Понятие о предельной гибкости.

Заведующий кафедрой _____/Кутепова Л.М./
(подпись)

Итоговый тест

Семестр: __3__

Контролируемые компетенции:

ОПК-5. Способен принимать обоснованные технические решения, выбирать эффективные и безопасные технические средства и технологии при решении задач профессиональной деятельности

Итоговый тест

Часть 1 с выбором ответа

1. Что изучает раздел механики «Статика»?
 - А) Движение тел без учета действующих сил.
 - Б) Равновесие материальных тел под действием сил
 - В) Прочность материалов при деформации.
 - Г) Кинематику точек твердого тела.

2. Какая величина является мерой механического действия одного материального тела на другое?
 - А) Масса.
 - Б) Ускорение.
 - В) Сила.
 - Г) Импульс.

3. Согласно первой аксиоме статики, для равновесия двух сил необходимо, чтобы они были...
 - А) Перпендикулярны друг другу.
 - Б) Равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.
 - В) Параллельны и сонаправлены.
 - Г) Приложены к разным точкам тела произвольно.

4. Какое условие является необходимым и достаточным для равновесия произвольной плоской системы сил?

А) Сумма всех сил равна нулю.

Б) Алгебраическая сумма моментов относительно одной точки равна нулю.

В) Сумма проекций всех сил на две оси координат и сумма моментов относительно любой точки равны нулю.

Г) Все силы должны пересекаться в одной точке.

5. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для произвольной плоской системы сил, не имеющей трения?

А) Одно.

Б) Два.

В) Три

Г) Шесть.

6. При использовании второй формы уравнений равновесия (два момента и одна проекция), какое требование предъявляется к расположению центров моментов А и В?

А) Они должны лежать на одной прямой с линией действия неизвестной силы.

Б) Точки А и В не должны лежать на одной прямой, перпендикулярной выбранной оси проекций

В) Расстояние между ними должно быть равно нулю.

Г) Они должны совпадать с точками приложения активных сил.

7. В каком из следующих случаев движение тела НЕЛЬЗЯ рассматривать как движение материальной точки?

А) Движение Земли вокруг Солнца.

Б) Движение спутника вокруг Земли.

В) Полет самолета из Владивостока в Москву.

Г) Вращение детали, обрабатываемой на станке.

8. Автомобиль объехал Москву по кольцевой дороге длиной 109 км. Чему равны пройденный путь l и перемещение S автомобиля?

А) $l=109$ км; $S=0$

Б) $l=218$ км; $S=109$ км

В) $l=218$ км; $S=0$

Г) $l=109$ км; $S=218$ км

9. Тело массой 2 кг движется со скоростью 3 м/с и ускорением 2 м/с².
Модуль равнодействующей сил, действующих на тело равен:

А) 2 Н

Б) 4 Н

В) 6 Н

Г) 10 Н

10. При скатывании цилиндра без проскальзывания с наклонной плоскости его полная кинетическая энергия складывается из:

А) Только поступательной энергии

Б) Только вращательной энергии

В) Суммы поступательной и вращательной энергий

Г) Разности поступательной и вращательной энергий

11. Способность материала сопротивляться разрушению или образованию остаточных деформаций под действием внешних сил называется...

А) Прочность

Б) Жесткость

В) Устойчивость

Г) Упругость

12. Деформация, при которой происходит увеличение длины стержня, называется...

А) Сжатие

Б) Растяжение

В) Кручение

Г) Изгиб

13. Напряженное состояние чистого сдвига характеризуется тем, что...

- А) Возникают только нормальные напряжения
- Б) Возникают только касательные напряжения
- В) Нормальные и касательные напряжения равны
- Г) Все напряжения равны нулю

14. При кручении круглого стержня его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга вокруг...

- А) Нейтральной оси
- Б) Продольной оси стержня
- В) Любой центральной оси
- Г) Оси, перпендикулярной сечению

15. В теории изгиба балок нейтральная линия (или ось) — это линия в поперечном сечении балки, где...

- А) Нормальные напряжения максимальны
- Б) Касательные напряжения максимальны
- В) Нормальные напряжения равны нулю
- Г) Материал начинает течь

16. Закон Гука при растяжении-сжатии устанавливает линейную зависимость между...

- А) Силой и перемещением
- Б) Напряжением и относительной деформацией
- В) Моментом и углом закручивания
- Г) Модулем упругости и коэффициентом Пуассона

17. Коэффициент Пуассона характеризует отношение...

- А) Предела текучести к пределу прочности

- Б) Поперечной деформации к продольной
- В) Абсолютного удлинения к начальной длине
- Г) Касательного напряжения к угловой деформации

18. Условие жесткости при кручении ограничивает...

- А) Максимальное касательное напряжение
- Б) Угол закручивания стержня
- В) Мощность, передаваемую валом
- Г) Диаметр вала

Часть 2 Вопросы на соответствие

Задание 19: установите соответствие между физической величиной и её определением

Физическая величина	Определение
1 Перемещение	А) Длина траектории движения
2.Путь	Б) Направленный отрезок, соединяющий начальное и конечное положение тела
3.Скорость	В) Быстрота изменения положения тела в пространстве
4 Ускорение	Г) Быстрота изменения скорости тела

Задание 20: Соответствие между типом движения и его характеристикой

Тип движения	Характеристика
1 Равномерное прямолинейное	А) $a = \text{const}$, а v изменяется линейно со временем
2.Равноускоренное	Б) $v = \text{const}$, $a = 0$
3.Равнозамедленное	В) Частный случай равноускоренного при $a < 0$
4 Вращательное	Г) Все точки тела описывают окружности вокруг оси вращения

Задание 21: Единицы измерения физических величин

величина	единица
длина	А) м/с ²
время	Б) рад/с
скорость	В) метр
угловая скорость	Г) секунда
ускорение	Д) м/с

Задание 22: Физические величины и формулы

Величина	Формула
1. Момент силы	А) $= J \times \omega$
2. Момент импульса	Б) $= F \times l$
3. Основное уравнение динамики вращения	В) $= \frac{dp}{dt}$
4. Кинетическая энергия вращения	Г) $= \frac{J \times \omega^2}{2}$

Задание 23: Типы движения и их характеристики

Тип движения	Характеристика
1. Поступательное	А) Все точки имеют одинаковую угловую скорость
2. Вращательное вокруг неподвижной оси	Б) Все точки движутся по прямым линиям
3. Плоское движение	В) Комбинация поступательного и вращательного
Сферическое движение	Г) Тело имеет три степени свободы вращения

Задание 24: Законы сохранения в динамике

Закон/принцип	Формулировка
1. Сохранение момента импульса	А) $\frac{dL}{dt} = M$
2. Теорема Штейнера	Б) $J = J_c + m \times d^2$
3. Принцип Даламбера	В) $\vec{P}_l + \vec{N}_l + \vec{\Phi}_l = 0$
4. Уравнение моментов	Г) $\frac{dL}{dt} = 0$

Задание 25. Установите соответствие между термином и его определением

Термин	Определение
1. Напряжение	А) Внутренняя сила, деленная на площадь поперечного сечения
2. Растяжение	Б) Графическое изображение распределения продольной силы по длине стержня.
3. Эпюра продольных сил	В) Мера интенсивности внутренних сил в теле.

Задание 26. Установите соответствие между термином и его определением

Термин	Определение
1. Прочность	А) Касательное напряжение пропорционально углу сдвига (
2. Закон Гука при сдвиге	Б) Жесткость материала при растяжении и сжатии; коэффициент пропорциональности между нормальным напряжением и относительной деформацией.
3. Модуль Юнга	В) . Способность материала сопротивляться разрушению.

1-в 2 а 3 б

Задание 27. Установите соответствие между термином и его определением

Термин	Определение
1. Эпюра крутящих моментов	А) График, показывающий изменение величины крутящего момента по длине вала.
2. Изгибающий момент	Б) Перемещение центра тяжести сечения вдоль главной центральной оси у.
3. Прогиб балки	В) Силовой фактор, вызывающий искривление оси прямого бруса.

Задание 28. Установите соответствие между термином и его определением

Термин	Определение
--------	-------------

1. Осевая сила	А) Деформация, характеризующаяся взаимным поворотом поперечных сечений стержня относительно его оси.
2. Чистый сдвиг	Б) Внутренний силовой фактор, численно равный сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня.
3. Кручение	В) Вид напряженного состояния, при котором возникают только касательные напряжения

Задание 29. Установите соответствие между термином и его определением

Термин	Определение
1. Полярный момент инерции	А) Линия в поперечном сечении балки, где нормальные напряжения от изгиба равны нулю.
2. Относительная деформация	Б) Отношение абсолютной деформации к первоначальной длине элемента
3. Нейтральная ось при изгибе	В) Геометрическая характеристика сечения, используемая в расчетах на кручение.

30. Расположите этапы решения задачи о движении твердого тела в правильной последовательности:

- А) Записать уравнения динамики (второй закон Ньютона для поступательного и вращательного движения)
- Б) Проанализировать условие и сделать схематический рисунок с указанием всех сил и моментов
- В) Определить тип движения и выбрать систему отсчета
- Г) Составить кинематические связи между линейными и угловыми величинами

Д) Решить полученную систему уравнений

Е) Проверить размерность и физический смысл результата

31. Расположите этапы решения задачи на равновесие плоской системы сходящихся сил в логическом порядке:

1. Выбор направления осей координат.
2. Составление уравнений равновесия ($\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$).
3. Выделение объекта равновесия и определение всех активных сил и реакций связей.
4. Проверка правильности решения и анализ полученных результатов.

32. Расположите этапы решения задачи на равновесие составной конструкции из двух тел в правильном порядке:

1. Рассмотрение одного из тел конструкции как свободного объекта равновесия под действием приложенных к нему внешних сил и реакций связей со стороны второго тела.
2. Составление полной расчетной схемы всей конструкции с указанием всех внешних нагрузок.
3. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.
4. Запись системы уравнений равновесия для каждого из тел отдельно (всего до 6 уравнений).
5. Определение искомых величин (реакций опор или внутренних усилий).

33. Расположите этапы решения задачи по кинематике твёрдого тела в правильной последовательности:

- А) Записать уравнения кинематики для данного вида движения
- Б) Проанализировать условие задачи и определить тип движения
- В) Выполнить математические преобразования и вычисления
- Г) Сделать чертёж или схему ситуации

Д) Проверить размерность полученного результата и оценить правдоподобность ответа

Е) Выбрать систему отсчёта и координатные оси

34 Логическая последовательность построения эпюр изгибающих моментов (М) и поперечных сил (Q) для балки.

А) Запись уравнений для Q и М на каждом участке.

Б) Разбиение балки на участки между точками приложения сосредоточенных сил и моментов.

В) Определение реакций опор из уравнений равновесия всей балки.

Г) Вычисление значений Q и М на границах участков и построение графиков (эпюр).

35. Хронологическая последовательность стадий деформирования стального образца при одноосном растяжении до разрушения.

А) Стадия упрочнения (от конца площадки текучести до предела прочности).

Б) Упругая стадия (деформации полностью исчезают после снятия нагрузки).

В) Стадия текучести (рост деформаций при практически постоянной нагрузке — площадка текучести).

Г) Разрушение образца.

36. Порядок действий при анализе сложного сопротивления (например, внецентренного сжатия) методом сложения действия сил.

А) Расчёт напряжений от каждого простого вида деформации (например, отдельно от сжатия, отдельно от изгиба).

Б) Разложение сложного нагружения на несколько простых (осевое усилие и изгибающие моменты).

В) Суммирование напряжений от всех простых видов деформации в интересующих точках сечения.

Г) Проверка прочности в этих точках по одной из теорий прочности.

Ключи оценивания

№ задания	Верный ответ														
1.	Б														
2.	В														
3.	Б														
4.	В														
5.	В														
6.	Б														
7.	Г														
8.	Г														
9.	В														
10.	Г														
11.	А														
12.	Б														
13.	Б														
14.	Б														
15.	В														
16.	Б														
17.	Б														
18.	Б														
19.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Б</td><td>А</td><td>В</td><td>Г</td></tr></table>				1	2	3	4	Б	А	В	Г			
	1	2	3	4											
Б	А	В	Г												
20.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Б</td><td>А</td><td>В</td><td>Г</td></tr></table>				1	2	3	4	Б	А	В	Г			
	1	2	3	4											
Б	А	В	Г												
21.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td><td>Б</td><td>А</td></tr></table>					1	2	3	4	5	В	Г	Д	Б	А
	1	2	3	4	5										
В	Г	Д	Б	А											

22.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Б</td><td>А</td><td>В</td><td>Г</td></tr></table>	1	2	3	4	Б	А	В	Г
1	2	3	4						
Б	А	В	Г						
23.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Б</td><td>А</td><td>В</td><td>Г</td></tr></table>	1	2	3	4	Б	А	В	Г
1	2	3	4						
Б	А	В	Г						
24.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Г</td><td>Б</td><td>В</td><td>А</td></tr></table>	1	2	3	4	Г	Б	В	А
1	2	3	4						
Г	Б	В	А						
25.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>В</td><td>А</td><td>Б</td><td></td></tr></table>	1	2	3		В	А	Б	
1	2	3							
В	А	Б							
26.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>В</td><td>А</td><td>Б</td><td></td></tr></table>	1	2	3		В	А	Б	
1	2	3							
В	А	Б							
27.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>А</td><td>В</td><td>Б</td><td></td></tr></table>	1	2	3		А	В	Б	
1	2	3							
А	В	Б							
28.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>Б</td><td>В</td><td>А</td><td></td></tr></table>	1	2	3		Б	В	А	
1	2	3							
Б	В	А							
29.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>В</td><td>Б</td><td>А</td><td></td></tr></table>	1	2	3		В	Б	А	
1	2	3							
В	Б	А							
30.	$B \rightarrow Б \rightarrow Г \rightarrow А \rightarrow Д \rightarrow E$								
31.	$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4.$								
32.	$2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5.$								
33.	$Б \rightarrow Г \rightarrow E \rightarrow А \rightarrow В \rightarrow Д$								
34.	$В \rightarrow Б \rightarrow А \rightarrow Г.$ Любые эпюры начинаются с определения опорных реакций. Затем балка делится на участки, для каждого участка записываются аналитические выражения для Q и M, и в конце строятся сами графики.								
35.	$: Б \rightarrow В \rightarrow А \rightarrow Г.$ Классический процесс растяжения малоуглеродистой стали: сначала упругость, потом площадка текучести, затем зона упрочнения до максимума нагрузки, и в конце — образование шейки и разрушение.								

36.	$B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$. Это суть метода суперпозиции: разложить сложное на простое, посчитать эффекты от простого, сложить их вместе и сделать итоговую проверку.
-----	---

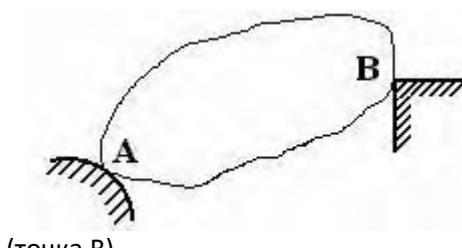
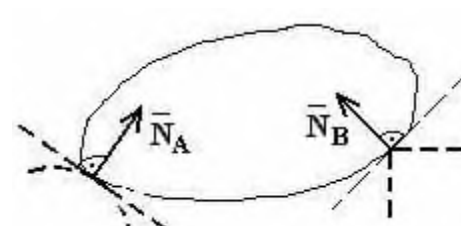
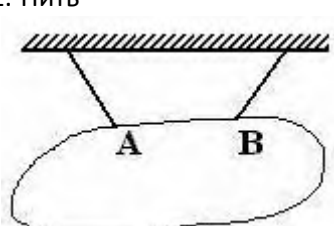
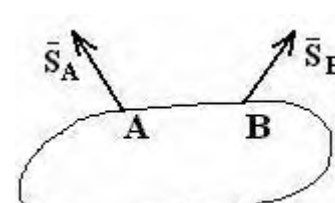
Практическое занятие

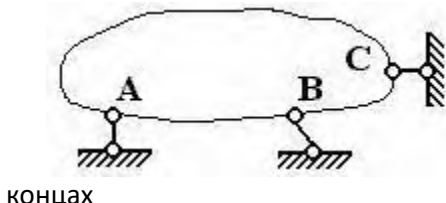
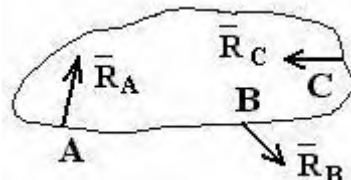
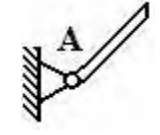
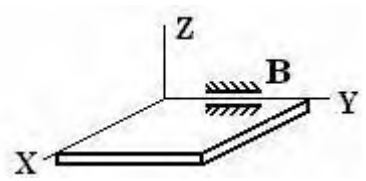
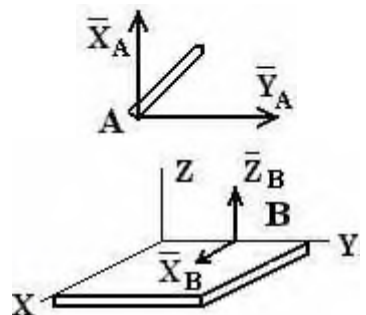
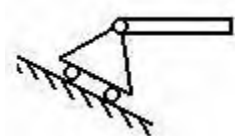
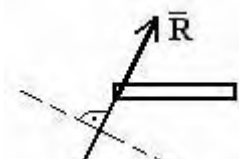
Тема 1.2 Формы уравнений равновесия. Равновесие системы тел.

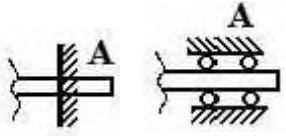
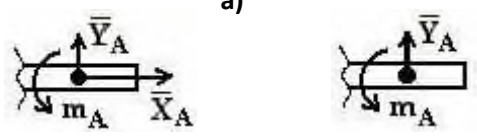
Статически определимые и статически неопределимые системы. Методические указания к решению задач статики.

Решение задач статики, сводится к определению реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь. А это, в свою очередь, позволит, пользуясь законами сопротивления материалов, рассчитать прочность конструкции или сооружения.

Типы связей. Реакции связей

Наименование связей и их обозначение на схемах	Реакции связей
1. Гладкая поверхность (точка A) и уступ (точка B) 	Реакция $\vec{N}$ направлена к телу. Реакция $\vec{N}_A$ гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Реакция $\vec{N}_B$ уступа направлена по нормали к поверхности опирающегося тела. 
2. Нить 	Реакция $\vec{S}$ направлена вдоль нити от тела (нить работает только 

	на растяжение)
3. Невесомый стержень с шарнирами на концах 	Реакция $\bar{R}$ направлена вдоль стержня, стержень работает либо на растяжение, либо на сжатие. 
4. Цилиндрический шарнир (подшипник) А – ось подшипника перпендикулярна чертежу  В – ось  подшипника совпадает с осью Y	
5. Подвижная шарнирная опора (на катках) 	Реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости 

6. Заделка а) жесткая б) скользящая 	Реакции при действии на тело плоской системы сил а) жесткая б) скользящая 

Порядок (план) решения задач.

Приступая к решению задания, необходимо разобраться в условии задачи и рисунке, а затем:

1. Составить расчетную схему, которая включает:
 - объект равновесия,
 - активные (заданные) силы,
 - силы реакции, заменяющие действия отброшенных связей.
2. Определить вид полученной системы сил и выбрать, соответствующие ей, уравнения равновесия;
3. Выяснить, является ли задача статически определимой;
4. Составить уравнения равновесия и определить из них силы реакции;
5. Сделать проверку полученных результатов. При замене связей (опор) силами реакций помнить:
 - если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;
 - если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям X и Y .

Решение уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое из них. Поэтому, при составлении уравнений равновесия следует: 1) координатные оси X и Y располагать так, чтобы одна из осей была перпендикулярна к линии действия хотя бы одной из неизвестных сил, в этом случае проекция неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) за центр моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила $\vec{F}$ в плоскости XY имеет две составляющие ее силы $\vec{F}_x$ $\vec{F}_y$ и, то при вычислении момента силы вокруг некоторой точки O , полезно применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки (см. рис. 4).

Если к телу в числе других сил приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил, куда вносится момент этой пары, с соответствующим, знаком.

Система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *системой сходящихся сил*.

Согласно аксиоме статики, равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис.7).

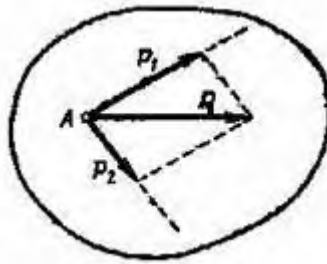


Рис.7

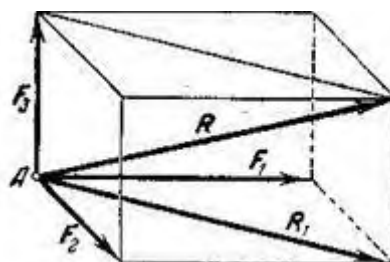
Из треугольника ADC находим модуль равнодействующей по формуле

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha},$$

где α - угол между векторами $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$.

Применяя последовательно правило параллелограмма, можно найти равнодействующую скольких угодно сходящихся сил. Найдем сначала

равнодействующую трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости (рис.8).



Сложив по правилу параллелограмма силы $\vec{R}_1$ $\vec{F}_2$ и ,
получим $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

их равнодействующую , а сложив затем $\vec{F}_2$ $\vec{F}_3$ и , найдем равнодействующую $\vec{R}$ трех данных сил и . Таким образом, равнодействующая трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости, равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, построенного на этих трех силах (правило параллелепипеда). Заметим, что при нахождении равнодействующей двух сил нет надобности строить весь параллелограмм. Для этого из конца вектора первой силы $\vec{R}_1$ (рис.9) проводим вектор

второй силы $\vec{F}_2$. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки полученной ломаной линии будет представлять собой по модулю и направлению равнодействующую $\vec{R}$ двух $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_2$ данных сил (правило треугольника).

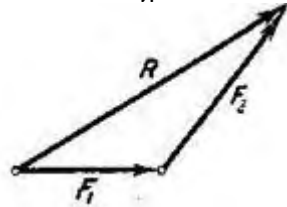
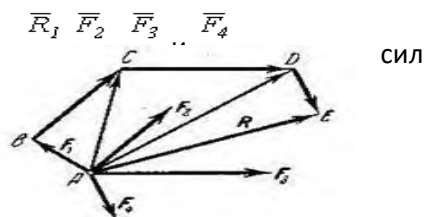


Рис.9

Как известно, в статике сила является скользящим вектором. Поэтому, точки приложения сходящихся сил можно перенести по линиям их действия в точку пересечения этих линий, а следовательно, систему сходящихся сил всегда можно заменить системой сил, приложенных в одной точке.

Пусть теперь нужно сложить несколько сил, например, четыре силы $\vec{R}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, приложенных в точке A (рис.10). Применяя последовательно правило треугольника, получим ломаную линию $ABCDE$. Вектор $\vec{AE}$, соединяющий начальную и конечную точки ломаной линии, изображает искомую равнодействующую $\vec{R}$ четырех сил



Таким образом, равнодействующая сходящихся сил изображается замыкающей стороной многоугольника сил, приложена в точке пересечения линий действия сил и равна их геометрической сумме

$$\begin{aligned}
 R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i, \\
 R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \\
 R_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i,
 \end{aligned}$$

где R_x, R_y, R_z — проекции равнодействующей на оси, а X_i, Y_i, Z_i — проекции сил на эти же оси.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (6)$$

Спроектировав равенство (6) на координатные оси, и учитывая, что проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций векторов на ту же ось, получим

(7)

и — проекции соответственно равнодействующей и сил системы на координатные оси.

Модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (8)$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю.

Так как равнодействующая $\bar{R}$ изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, то для того чтобы равнодействующая равнялась нулю, силовой многоугольник должен быть замкнутым, то есть конец вектора, изображающего последнюю силу, должен совпадать с началом вектора, изображающего первую силу.

Таково условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме.

Выразим теперь то же условие аналитически.

Из (8) следует, что при равновесии должно иметь место равенство

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 0.$$

Так как все слагаемые в левой части не могут быть отрицательными, то это

равенство справедливо только в случае, если $R_x = R_y = R_z = 0$. С учетом (7), окончательно получим

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \quad (9)$$

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех этих сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

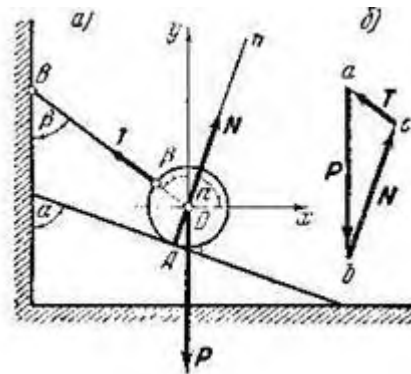
Понятно, что в случае плоской системы сходящихся сил для равновесия должны быть выполнены только первые два из условий (9).

При решении задач статики иногда удобно пользоваться теоремой о трех силах: *если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

В большинстве случаев в задачах статики по заданным (известным) силам, приложенным к данному несвободному твердому телу, требуется определить неизвестные реакции связей, предполагая, что тело находится в покое и все приложенные к нему силы уравниваются. При аналитическом решении задачи эти силы находятся из уравнений (9), в левые части которых войдут, кроме заданных известных сил, и неизвестные реакции связей.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Шар веса P опирается в точке A на наклонную плоскость, образующую с вертикалью угол α , и привязан к стене веревкой, которая образует с вертикалью угол β (рис.11а). Определить реакцию плоскости в точке A и натяжение веревки.



Решение: Обозначим искомую реакцию плоскости, направленную по нормали Ax к этой плоскости, через $\bar{N}$, а натяжение веревки – через $\bar{T}$. Линия действия всех трех сил $\bar{N}, \bar{T}, \bar{P}$ и пересекаются в центре шара. Примем вертикаль и горизонталь в точке O за

координатные оси и найдем проекции сил $\bar{N}, \bar{T}, \bar{P}$ на эти оси:

$$\begin{aligned} N_x &= N \cos \alpha, & T_x &= -T \sin \beta, & P_x &= 0, \\ N_y &= N \sin \alpha, & T_y &= T \cos \beta, & P_y &= -P. \end{aligned}$$

Так как данная система сходящихся сил является плоской, то условия равновесия (4) имеют вид

$$\begin{aligned} 1) & \quad N \cos \alpha - T \sin \beta = 0, \\ 2) & \quad N \sin \alpha + T \cos \beta - P = 0. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на $\cos \beta$

$$N = \frac{P \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

, а второе на $\sin \beta$ и сложив их, получим

Затем из первого уравнения находим

$$T = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

В случае, когда веревка, удерживающая шар, параллельна наклонной плоскости ($\beta = \alpha$), получим $N = P \sin \alpha$, $T = P \cos \alpha$.

Для решения этой же задачи графическим способом, необходимо построить замкнутый силовой многоугольник. Построение силового многоугольника всегда нужно начинать с известных, заданных сил. Из произвольной точки a (рис.13б) проведем вектор $\overline{ab}$, параллельный данной силе, длина которого в выбранном масштабе изображает модуль этой силы. Затем через точки a и b проводим прямые, параллельные линиям действия искомых сил T и N , которые пересекутся в точке c . Векторы $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ определяют искомые силы T и N . Чтобы найти направление искомых сил на силовом треугольнике, нужно обойти этот треугольник по его периметру, причем направление этого обхода определяется направлением данной силы. Измерив длину сторон bc и ca и зная масштаб, в котором построена сила ab , найдем численные значения сил T и N .

Пример 2. Определить реакции стержней, удерживающих грузы $F_1=70$ кН и $F_2=100$ кН (рис 12,а). Массой стержней пренебречь.

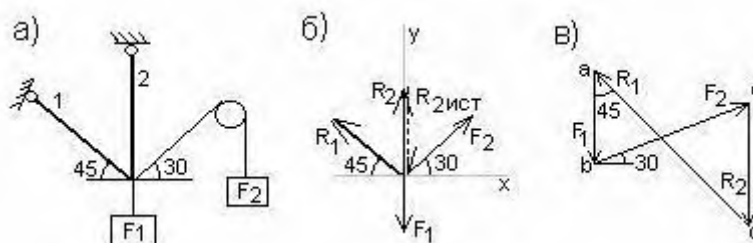


Рис.12

Указание. В данной задаче рассматривается равновесие плоской системы сходящихся сил и требуется определить реакции двух шарнирно соединенных между собой стержней, удерживающих два груза. Таким образом, к шарниру B в каждой задаче приложены четыре силы, из которых две неизвестны. Для задач такого типа универсальным является аналитический метод решения.

Последовательность решения задачи:

1. выбрать тело (точку), равновесие которого следует рассматривать;
2. освободить тело (шарнир B) от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей. Причем реакции стержней следует направить от шарнира B , так как принято считать предположительно стержни растянутыми;
3. выбрать систему координат, совместив ее начало с точкой B , и составить уравнения равновесия, используя условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости $\sum X_i = 0$, $\sum Y_i = 0$;

4. определить реакции стержней из решения указанной системы уравнений;
5. проверить правильность полученных результатов по уравнению, которое не использовалось при решении задачи, либо решить задачу графически.

Решение.

1. Рассматриваем равновесие шарнира B (рис 12,а)
2. Освобождаем шарнир B от связей и изображаем действующие на него активные силы и реакции связей (рис.14,б)

3. Выбираем систему координат и составляем уравнения равновесия для системы сил, действующих на шарнир B.

$$\sum X = -R_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = R_1 \sin 45^\circ + R_2 + F_2 \sin 30^\circ - F_1 = 0$$

4. Определяем реакции стержней R_1 и R_2 , решая уравнения.

$$R_1 = \frac{F_2 \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0.866}{0.707} = 122.6 \text{ кН}$$

Из уравнения 1:

Подставляем найденное значение R_1 в уравнение 2 и получаем

$$R_2 = F_1 - F_2 \sin 30^\circ - R_1 \sin 45^\circ = 70 - 100 \cdot 0.5 - 122.6 \cdot 0.707 = -66.6 \text{ кН}$$

Знак минус перед значением R_2 указывает на то, что первоначально выбранное направление реакции неверно – следует направить реакцию R_2 в противоположную сторону, т.е. к шарниру B (на рис.12,б истинное направление реакции R_2 показано штриховым вектором)

5. Проверяем правильность полученных результатов, решая задачу графически (рис. 14,в). Полученная система сил (рис.12,б) находится в равновесии, следовательно, силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, должен быть замкнутым.

Строим силовой многоугольник в следующем порядке (рис.12,в): в выбранном масштабе (например, $\mu_{\text{сил}} = 2 \text{ кН/мм}$) откладываем заданную силу F_1 ($ab = F_1$), затем из точки b под углом 30° к горизонту откладываем силу F_2 ($bc = F_2$), далее из точек a и c проводим прямые, параллельные положениям стержней 1 и 2. Эти прямые пересекаются в точке d и в результате построения образуется замкнутый многоугольник $abcd$, в котором сторона $cd = R_2$, а сторона $da = R_1$. Измерив длины этих сторон (в мм) и умножив на масштаб построения $\mu_{\text{сил}}$, получаем значения реакций

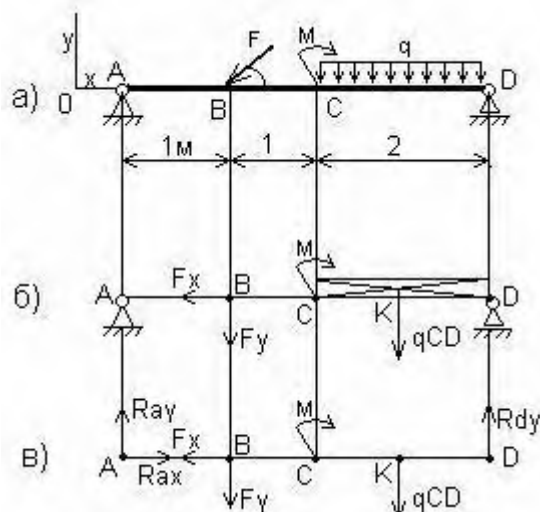
$$R_2 = cd \cdot \mu_{\text{сил}} = 33 \cdot 2 = 66 \text{ кН}$$

стержней: $R_1 = da \cdot \mu_{\text{сил}} = 61 \cdot 2 = 122 \text{ кН}$

Графическое решение подтверждает правильность первого решения.

Плоская система сил

Пример 1. Определить реакции опор балки (рис.13, а).



Указание. Во всех данных задачах требуется определить реакции опор балок. Учащимся необходимо приобрести навыки определения реакций опор, так как с этого начинается решение многих задач по сопротивлению материалов и деталям машин.

Последовательность решения задачи:

1. изобразить балку вместе с нагрузками;
2. выбрать расположение координатных осей, совместив ось x с балкой, а ось y направив перпендикулярно оси x ;
3. произвести необходимые преобразования заданных активных сил: силу, наклоненную к оси балки под углом α , заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими, а равномерно распределенную по закону прямоугольника нагрузку – ее равнодействующей, приложенной к середине участка распределения нагрузки;
4. освободить балку от опор, заменив их действие реакциями опор, направленными вдоль выбранных осей координат;
5. составить уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор;
6. проверить правильность найденных опорных реакций по уравнению, которое не было использовано для решения задачи.

Решение.

1. Изобразим балку с действующими на нее нагрузками (рис.13,а)

2. Изобразим оси координат x и y

3. Силу F заменяем ее составляющими $F_x = F \cos \alpha$ $F_y = F \sin \alpha$ и .

Равнодействующая q_{CD} равномерно распределенной нагрузки, приложенная в точке пересечения диагоналей прямоугольника (рис.13,б), переносится по линии своего действия в середину участка CD , в точку K .

4. Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями (рис.13,в)

5. Составляем уравнения равновесия статики и определяем неизвестные реакции опор.

а) Из уравнения моментов всех действующих на балку сил, составленного относительно одной из точек опор, сразу определяем одну из неизвестных вертикальных реакций:

$$\sum M_A = F_y \cdot AB + M + q_{CD} \cdot AK - R_D \cdot AD = 0$$

$$R_D = \frac{F_y \cdot AB + M + q_{CD} \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6,5 \text{ кН}$$

б) Определяем другую вертикальную реакцию:

$$\sum M_D = R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - q_{CD} \cdot KD = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_y \cdot BD - M + q_{CD} \cdot KD}{AD} = \frac{F \sin \alpha \cdot BD - M + q_{CD} \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5,5$$

кН

с) Определяем горизонтальную реакцию:

$$\sum X = R_{Ax} - F_x = 0 \quad R_{Ax} = F_x = F \cos \alpha = 20 \cdot 0,86 = 17,3; \quad \text{кН}$$

$$\sum Y = R_{Ay} - F_y - qCD + R_{Dy} = 5.5 - 10 - 2 + 6.5 = 0$$

6. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum Y_i = 0$$

Условие равновесия

выполняется, следовательно, реакции опор найдены

верно.

Пример 2. На вал (рис.14,а) жестко насажены шкив 1 и колесо 2. Определить силы F_2 , $F_{r2}=0,4F_2$, а также реакции опор А и В если $F_1=100\text{Н}$.

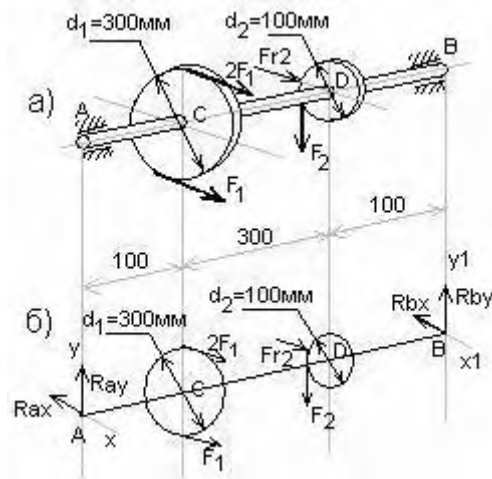


Рис.14

Указание.

Последовательность решения задачи:

1. изобразить на рисунке тело, равновесие которого рассматривается, с действующими на него активными и реактивными силами и выбрать систему координат;
2. из условия равновесия тела, имеющего неподвижную ось, определить значения сил F_1 , F_2 ;

3. составить шесть уравнений равновесия;
4. решить уравнения и определить реакции опор; 5. проверить правильность решения задачи.

Решение.

1. Изображаем вал с всеми действующими на него силами, а также оси координат. (рис.16,б)

2. Определяем F_2 и F_{r2} . Из условия равновесия тела, имеющего неподвижную ось:

$$F_1 \cdot \frac{d_1}{2} - F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 0 ;$$

$$F_2 = \frac{F_1 d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 0.3}{0.1} = 300 \text{ Н} ;$$

$$F_{r2} = 0.4 F_2 = 0.4 \cdot 300 = 120 \text{ Н}$$

3. Составляем шесть уравнений

равновесия:

$$\sum M_X = -R_{BY} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0$$

$$\sum M_Y = 3F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{BX} \cdot AB = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{X1} = R_{AY} \cdot AB - F_2 \cdot DB = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{Y1} = R_{AX} \cdot AB - 3F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB = 0 \quad (3)$$

$$\sum X = 3F_1 + F_{r2} - R_{AX} - R_{BX} = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y = R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 0 \quad (5)$$

(6)

4. Решаем

уравнения (1), (2), (4) и определяем реакции опор:

$$(3), \quad R_{BY} = \frac{F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{300 \cdot 0.4}{0.5} = 240H$$

$$R_{BX} = \frac{3F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0.1 + 120 \cdot 0.4}{0.5} = 156H$$

$$\text{Из (1):} \quad R_{AY} = \frac{F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{300 \cdot 0.1}{0.5} = 60H$$

$$\text{Из (2):} \quad R_{AX} = \frac{3F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0.4 + 120 \cdot 0.1}{0.5} = 264H$$

Из (3):

Из (4):

5. проверяем правильность найденных реакций опор. Используем уравнение

(5)

$$\sum X = 3F_1 + F_{r2} - R_{AX} - R_{BX} = 300 + 120 - 264 - 156 = 0$$

$$\sum X = 0, \text{ следовательно, реакции } R_{AX} \text{ и } R_{BX} \text{ определены верно.}$$

Используем уравнение (6):

$$\sum Y = R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 60 - 300 + 240 = 0$$

$$\sum Y = 0, \text{ следовательно, реакции } R_{AY} \text{ и } R_{BY} \text{ определены верно.}$$

Данную задачу можно решать другим методом: спроектировать тело со всеми действующими на него активными и реактивными силами на три координатные плоскости, чтобы проще было составлять уравнения равновесия.

Система параллельных сил

Пусть на твердое тело действуют две параллельные силы $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$ и , направленные в одну сторону (рис.15).

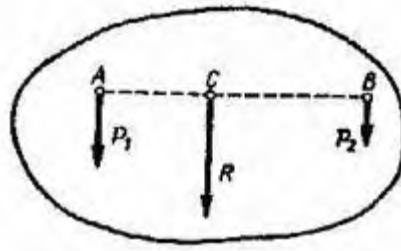


Рис.15

Равнодействующая $\vec{R}$ двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна этим силам и направлена в ту же сторону; модуль равнодействующей равен сумме модулей данных сил, а линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения данных сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил, т.е.

$$R = P_1 + P_2 \quad AC/BC = P_2/P_1;$$

Используя известное свойство пропорции, можно получить

$$AC/P_2 = BC/P_1 = AB/R.$$

Для системы параллельных сил на плоскости имеем два условия равновесия

$$M = 0 \quad \text{и}$$

Так уравнения равновесия для данной системы сил можно выразить в виде двух уравнений

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0.$$

Уравнения называются основными уравнениями равновесия параллельных сил на плоскости. Центр моментов для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Для пространственной системы сил, параллельных, например, оси Z , имеем три уравнения равновесия

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. На тело действуют пять параллельных сил, имеющих модули $10H$, $15H$, $30H$, $15H$ и $10H$, приложенных соответственно $A_1(1,2,3)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(0,1,1)$ и $A_5(1,-1,0)$ в точках, и, причем первые четыре силы направлены в одну и ту же сторону, а последняя - в противоположную сторону. Найти координаты центра этой системы сил.

Решение. Полагая в формулах (14) для координат центра параллельных сил

$$P_1 = 10H, P_2 = 15H, P_3 = 30H, P_4 = 15H, P_5 = -10 \text{ и } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 1, \text{ получим}$$

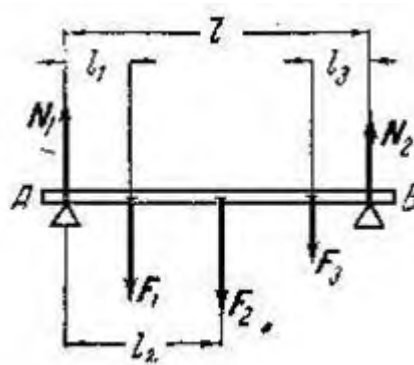
$$X_C = \frac{10 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 15 \cdot 0 - 10 \cdot 1}{10 + 15 + 30 + 15 - 10} = 2$$

C

Аналогично, найдем две другие координаты точки

$$Y_C = 2; \quad Z_C = 2$$

Пример 2. К горизонтальной балке, лежащей на двух опорах, приложены вертикальные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и . Определить реакции опор.



Решение. Обозначим реакции опор через $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ и . Поскольку балка находится в равновесии, направив ось Ay вертикально вверх, составим уравнения равновесия для данной задачи

$$\sum M_{iA} = 0 \quad lN_2 - l_1F_1 - l_2F_2 - (l - l_3)F_3 = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad N_1 - F_1 - F_2 - F_3 + N_2 = 0$$

1)

2)

Из первого уравнения получим

$$N_2 = \frac{l_1}{l}F_1 + \frac{l_2}{l}F_2 + (1 - \frac{l_3}{l})F_3$$

Подставив значение N_2

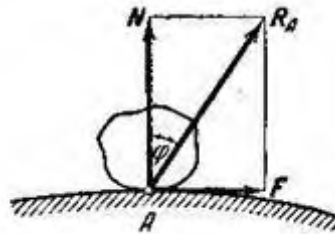
во второе уравнение, найдем N_1

$$N_1 = (1 - \frac{l_1}{l})F_1 + (1 - \frac{l_2}{l})F_2 + \frac{l_3}{l}F_3$$

Равновесие тел с учетом трения

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется *трением скольжения*.

Опыты показывают, что реакция неподвижной поверхности образует с нормалью к этой поверхности некоторый угол (рис.17), так что эту силу можно разложить на две составляющие: 1) силу, направленную по нормали к опорной поверхности и называемую *нормальной реакцией*, и 2) силу $\vec{F}$, лежащую в плоскости, касательной опорной поверхности, и противодействующую скольжению тела по этой поверхности. Эта сила $\vec{F}$ называется *силой трения скольжения*.



Заметим, что полная реакция опорной поверхности не может быть направлена по прямой, лежащей вне конуса трения.

Аналитический метод решения задач о равновесии твердого тела при наличии трения остается таким же, как и в тех случаях, когда трением пренебрегаем. Различие состоит лишь в том, что в уравнениях равновесия появляются, кроме нормальных реакций, силы трения.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Плоскость

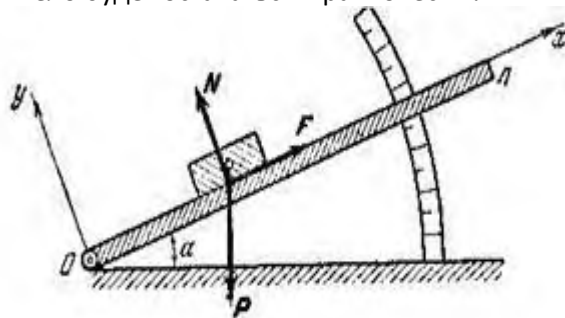
, так что ее можно

установить под любым углом

P

(рис.20). При каком угле

OA может вращаться на шарнире O
 α к горизонту. На эту плоскость положено тело весом P
 α тело будет оставаться в равновесии?



Решение. Обозначим через $\bar{N}$ нормальную реакцию плоскости и через $\bar{F}$ силу трения. Составим два уравнения равновесия для сходящейся системы сил ,

$\bar{F}_x$ силу
($\bar{N}, \bar{F}, \bar{P}$)

спроектировав их на оси Ox и Oy
 $\bar{F} - P \sin \alpha = 0$ $N - P \cos \alpha = 0$,

Из этих уравнений получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{N}$$

Наибольшее значение, которого может достигнуть сила трения в покое, равно

$$F_{\max} = fN . \text{ Поэтому } F \leq fN , \text{ а следовательно}$$

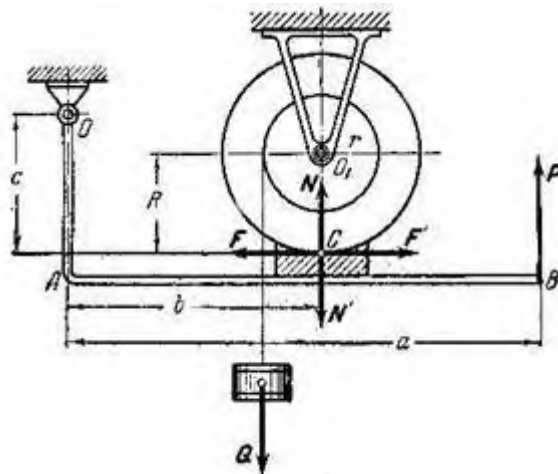
$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{fN}{N} , \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq f .$$

Так как $f = \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}}$ $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}}$ или $\alpha \leq \varphi_{\text{тр}}$, то .

Отсюда заключаем, что тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока угол наклона плоскости не превышает угла трения.

Заметим, что при помощи прибора, изображенного на рис.25, можно определить коэффициент трения.

Пример 2. На рис. 21 показана схема колодочного тормоза. Найти наименьшее значение силы $\bar{P}$, необходимое для того, чтобы затормозить шкив . Коэффициент трения f между тормозной колодкой и поверхностью шкива равен k . Нужные размеры указаны на чертеже.



Решение. Приложенные к шкиву в точке C нормальное давление и силу трения обозначим через $\bar{N}$ и $\bar{F}$. В той же точке к тормозной колодке приложены нормальная реакция $\bar{N}'$ и сила трения $\bar{F}'$, равные по модулю и противоположные по направлению силам $\bar{N}$ и $\bar{F}$.

($\bar{N}, \bar{F}, \bar{P}$)

$$rQ - RF = 0 \quad cF' + aP - bN' = 0$$

$$F = kN \quad k \leq f$$

Напишем условия равновесия для шкива и для рычага OAB в отдельности, приравняв нулю сумму моментов всех сил, приложенных к шкиву, относительно точки O и

сумму моментов сил, приложенных к рычагу, относительно точки A . Получим два уравнения

Положим $\frac{P}{Q} = k$, где k — коэффициент. Подставив это значение P в эти уравнения и заменив P и Q через k и Q , получим

Определив величину k из первого уравнения и подставив ее значение во второе уравнение, найдем

$$P = \frac{Qr}{aR} \left(\frac{b}{k} - c \right).$$

Как видно из формулы, с увеличением коэффициента k величина Q уменьшается и когда k достигает наибольшего значения f , сила Q будет иметь наименьшее значение. Следовательно, окончательно получим

$$P_{\min} = \frac{Qr}{aR} \left(\frac{b}{f} - c \right).$$

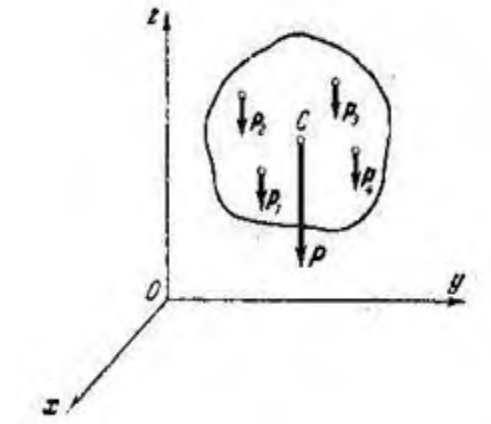
Тема 1.3 Центр тяжести. Центр параллельных сил и центр тяжести. Методы определения центра тяжести. Центр тяжести объемной, плоской и линейной фигуры. Координаты центров тяжести простейших тел.

Представим себе какое-нибудь твердое тело, находящееся близ поверхности Земли

(рис.1). Силы притяжения $\vec{P}_i$ отдельных частиц тела к Земле направлены приблизительно к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Центр C этой системы параллельных

сил называется *центром тяжести* данного тела, а равнодействующая этих сил проходящая через точку C , представляет собой вес этого тела.

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i,$$



Положим, что площади частей фигуры соответственно равны S_1, S_2, S_3 , а . Тогда координаты

координаты их центров тяжести C_1, C_2 и C_3 будут x_1, y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3 ее центра тяжести C определяются формулами ;

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S} \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S} \quad (21)$$

Этими формулами удобно пользоваться и при определении положения центра тяжести плоской фигуры, из которой вырезана некоторая часть (рис.2).

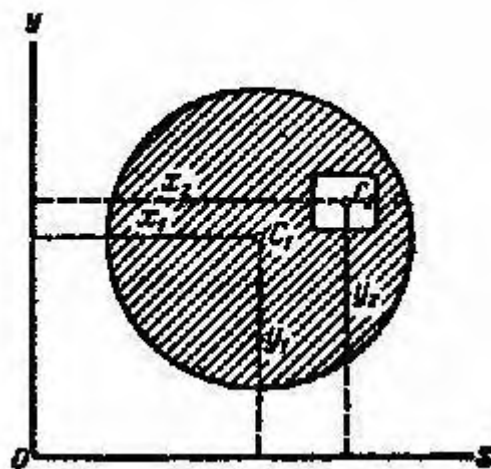


Рис.2

В этом случае координаты центра тяжести выражаются формулами

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \quad y_c = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2},$$

где S_1 и S_2 - площади соответственно всей фигуры и вырезанной из нее части,
 x_1, y_1 и x_2, y_2 - координаты их центров тяжести.

а

Этот способ определения центра тяжести плоской фигуры называется *способом отрицательных площадей*.

а) Центр тяжести площади треугольника

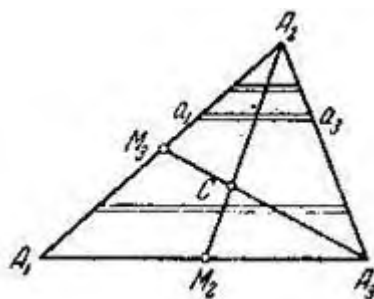


Рис.3

Центр тяжести C площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан.

$$\left(CM_2 = \frac{A_2 M_2}{3} \right)$$

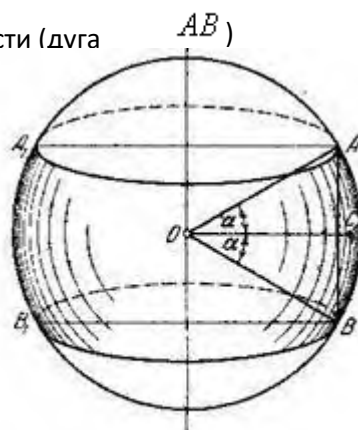
Если обозначить координаты вершин данного треугольника через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, то для координат x_c и y_c его центра тяжести получим

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

б) Центр тяжести дуги окружности (дуга AB)

$$OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

где α - половина центрального угла дуги, измеряемого в радианах.



в) Центр тяжести площади кругового сектора ()

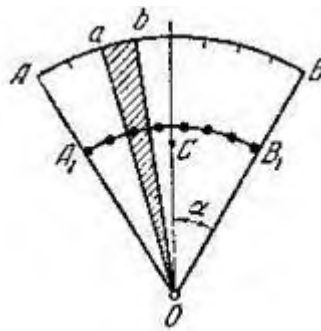


Рис. 5

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти центр тяжести фигуры, состоящей из полукруга радиуса R и

$2R$ и h (рис. 6)

прямоугольника со сторонами

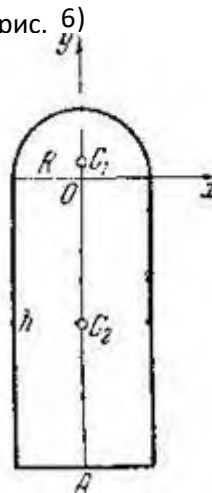


Рис.6

Решение. Возьмем начало координат в геометрическом центре полукруга O и направим y как C_2 лежит в середине отрезка OA . Точка C_1 Так OC_1 , равно, согласно формуле, $4R/3\pi$ как ось является для данной C_1 и C_2 фигуры осью O симметрии то, согласно вышеприведенной теореме, искомым центр тяжести лежит

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$$

Здесь S_1 и AB - площади полукруга и прямоугольника, а C_1 и C_2 . Следовательно,

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2} \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi}; \quad S_2 = 2Rh; \quad y_2 = -\frac{h}{2}$$

на этой оси и, следовательно, $x_c = 0$. Остается найти y_c . Разобьем фигуру на две части: полукруг и прямоугольник. Центры тяжести этих частей обозначим через .

Точка находится от точки на расстоянии . Тогда, согласно формулам, имеем

y_1 y_2 и - ординаты точек

Тогда, окончательно получим

$$y_c = \frac{2(2R^2 - 3h^2)}{3(\pi R + 4h)}.$$

Пример 2. Определить положение центра тяжести фигуры, представляющей собой круг радиуса R , из которого вырезан круг меньшего радиуса, $OO_1 = a$ (рис. 7). причем расстояние между центрами кругов

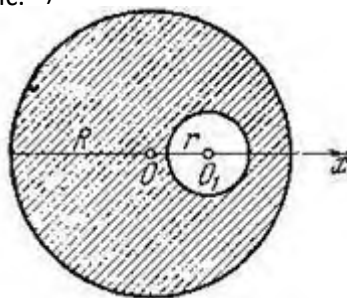


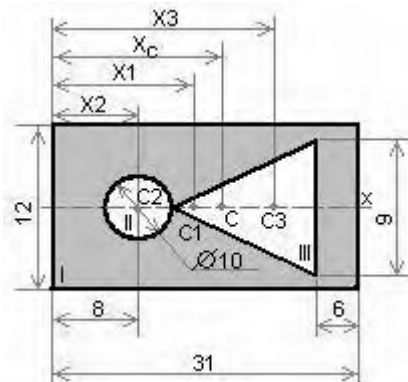
Рис.7

Решение. Искомый центр тяжести лежит на оси симметрии Ox , проходящей через центры кругов O и O_1 . ; начало координат возьмем в центре большого круга. Площадь первого круга $S_1 = \pi R^2$, центр тяжести которого совпадает с O $x_1 = 0$. Так как площадь AB $S_2 = -\pi r^2$ минус, т.е. x_2 маленького круга будет отниматься, то ее нужно брать со знаком минус. Абсцисса $x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$ искомого центра тяжести определяется по формуле

Окончательно получим

$$x_c = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

Пример 3. Определить положение центра тяжести для тонкой однородной пластины, форма и размеры которой, в сантиметрах, показаны на рисунке 8.



Указание. С целью упрощения решения следует стремиться разбить заданную сложную плоскую фигуру на возможно меньшее число простых частей, применяя в случае необходимости «метод отрицательных площадей».

Последовательность решения задачи:

1. изобразить на рисунке пластину и показать все ее размеры;
 2. если не указаны заранее, указать на чертеже координатные оси;
 3. разбить фигуру на возможно меньшее число простых фигур (треугольник, квадрат, круг, сегмент и т.д.);
 4. вычислить площадь каждой части – простой фигуры, учитывая «метод отрицательных площадей» (если простая фигура вырезана из основной, то ее площадь считается отрицательной);
 5. находим центр тяжести выделенных простых фигур по стандартным формулам (если имеется ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси);
 6. вычисляем координаты x_c и y_c центра тяжести плоской пластины.
- Решение.**

Данную фигуру представляем состоящей из трех простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круга, 3 – треугольника.

Площади кругового и треугольного отверстий вводим в расчет со знаком минус, а площадь прямоугольника – без учета имеющихся в нем отверстий. Площади простых фигур:

$$A_1 = 12 \cdot 31 = 372 \text{ см}^2$$

$$A_2 = -\pi r^2 / 4 = -3.14 \cdot 100 / 4 = -78.5 \text{ см}^2$$

$$A_3 = -12 \cdot 9 / 2 = -54 \text{ см}^2$$

$$h = 31 - (8 + 10 / 2 + 6) = 12 \text{ см}, \text{ где совпадающая с осью симметрии высота}$$

треугольника

Фигура имеет ось симметрии, следовательно, ее центр тяжести лежит на этой оси. Совмещаем координатную ось x с осью симметрии, а начало координат – с левым краем фигуры (чтобы координаты центров тяжести оказались положительными).

Координаты центра тяжести простых фигур: $x_1 = 31/2 = 15,5 \text{ см}$, $x_2 = 8 \text{ см}$, $x_3 = 31 - 6 - 12/3 = 21 \text{ см}$, где $12/3$ – расстояние от центра тяжести треугольника до его основания, равное $1/3$ высоты.

Координата центра тяжести заданной фигуры

$$X_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{372 \cdot 15,5 - 78,5 \cdot 8 - 54 \cdot 21}{372 - 78,5 - 54} = 16,7 \text{ см}$$

Ответ: 16,7 см

Произвольная пространственная система сил

Если силы, действующие на тело, лежат в пространстве, то такая система сил называется пространственной, и если главный вектор и главный момент системы равны нулю, то система сил уравновешенная.

Следовательно, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы будут $R = 0$, $M = 0$ – в векторной форме. Так как при равновесии главный момент равен нулю относительно любого центра приведения, то вместо M_O можно писать M без индекса.

Спроектировав главный вектор R на координатные оси Ox , Oy , Oz получим аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил, которые выражаются шестью

$$\sum X_i = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \text{уравнениями равновесия и}$$

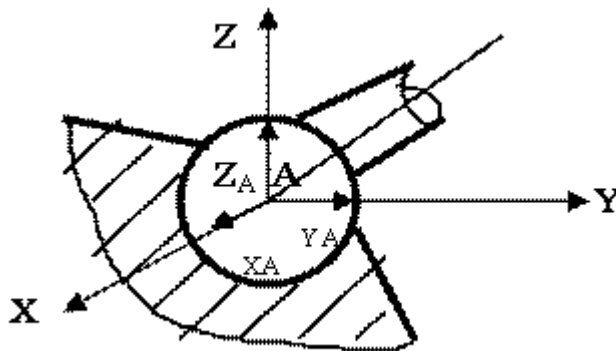
$$\sum Y_i = 0 \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum Z_i = 0 \quad \sum M_z = 0$$

и формулируется так: произвольная пространственная система сил находится в равновесии, если сумма проекций сил на каждую из координатных осей и сумма моментов всех сил относительно осей координат равны нулю.

При решении необходимо рассмотреть связи, которые до сих пор не встречались нам.

Подпятник (рис.9) – это тип опоры не препятствующий повороту тела или какойлибо его детали вокруг своего центра, но препятствующий смещению тела в любом направлении, поэтому для такого типа опоры не известны ни величина реакции, ни образуемые ею с координатами осями углы, а известна только точка приложения реакции.



Такую реакцию можно представить составляющими, направленными в положительных направлениях трех осей координат (отрицательный знак, полученный при решении уравнения равновесия, покажет, что в действительности та или иная составляющая опорной реакции направлена в противоположную выбранному направлению сторону).

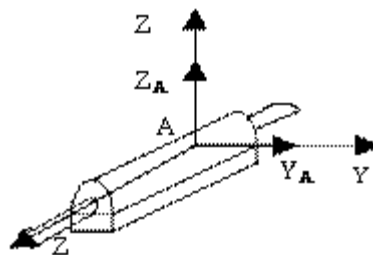
В большинстве задач требуется определить не реакцию, а ее составляющие, сама реакция определяется как диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на составляющих X , Y , Z как на сторонах.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Направление реакции можно определить по направляющим косинусам

$$\begin{aligned} \cos(R, x) &= x/R, \\ \cos(R, y) &= y/R, \\ \cos(R, z) &= z/R. \end{aligned}$$

Подшипник (рис.10) - это цилиндрический шарнир, позволяющий телу или его элементу (например, валу, оси и т.д.) поворачиваться вокруг своей оси, смещаться вдоль нее, но не позволяющему перемещаться в перпендикулярной плоскости к его оси, следовательно, реакция подшипника может быть расположена только в плоскости, перпендикулярной к его оси. Зная в этой плоскости только точку приложения реакции и не зная угла, образуемого ею с какой-либо находящейся в этой плоскости осью, представляем реакцию двумя составляющими, направленными в положительные стороны координатных осей, расположенных в этой плоскости. Сама реакция R может быть определена как равнодействующая определенных составляющих Y и Z .



$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

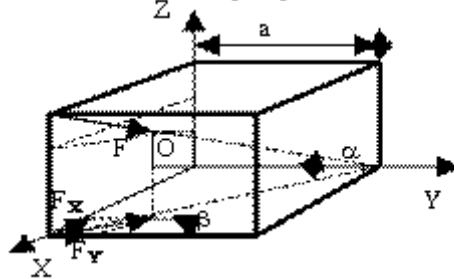
Направление ее может быть найдено по формулам:

$$\begin{aligned} \cos(R, y) &= y/R, \\ \cos(R, z) &= z/R. \end{aligned}$$

Порядок (план) решения задач.

1. Установить, равновесие какого тела нужно рассмотреть, чтобы определить неизвестные величины.
2. Выбрать начало координат и положения координатных осей.

3. Установить, какие активные силы действуют на тело.
4. Освободившись от связей, наложенных на рассматриваемую систему, заменить действие связей силами реакций связей.
5. Составить соответствующие уравнения равновесия.
6. Решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины.
7. Найдя знаки неизвестных сил, установить их фактические направления.



Рассмотрим сначала методику определения проекций силы на оси координат и моментов ее относительно этих осей. Пусть по внутренней диагонали куба (рис.11) действует сила F . Определим проекции силы F на оси координат и моменты ее относительно осей. Чтобы найти проекции силы на ось координат, необходимо применить метод двойного проектирования, который заключается в том, что сначала сила проецируется на плоскость, включающую данную ось, а затем уже эта проекция проецируется на данную ось. Так, чтобы определить проекцию силы F на ось X , необходимо сначала спроецировать ее на плоскость XOY , а уже затем на ось ординат. В результате получим, что

$$F_x = -F \cos \alpha \sin \beta,$$

где $\cos \alpha = a\sqrt{2}/a\sqrt{3} = \sqrt{2}/\sqrt{3}, \quad \sin \beta = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2};$

$$F_x = -F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

Тема: 1.4 Кинематика. Кинематика точки. Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки. Кинематические характеристики точки. Определение скорости и ускорения точки при различных способах задания движения

В задачах данного раздела определяются координаты, скорость, ускорение точки в любой назначенный момент времени при различных способах задания движения. Из всех способов задания движения точки наибольшее распространение получили координатный и естественный способы.

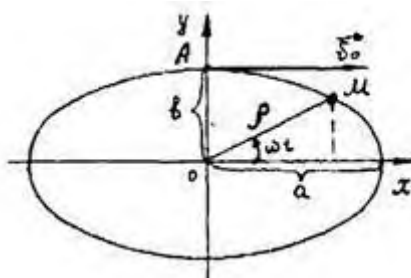
Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Точка M движется по эллипсу так, что угловая скорость радиусавектора ρ , соединяющего точку M с центром эллипса, постоянна и равна ω .

Определить скорость этой точки. **Решение.**

Выразим декартовы координаты точки M через полярные координаты ρ и φ и

(рис.2).



$$x = \rho \cos \omega t, \quad y = \rho \sin \omega t, \quad \omega t = \varphi \quad \text{где}$$

Подставив эти значения в уравнение эллипса, получим

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \omega t}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \omega t}{b^2} = 1$$

Из последнего равенства для радиуса-вектора имеем

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \omega t + a^2 \sin^2 \omega t}}$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), найдем радиальную и тангенциальную составляющие скорости

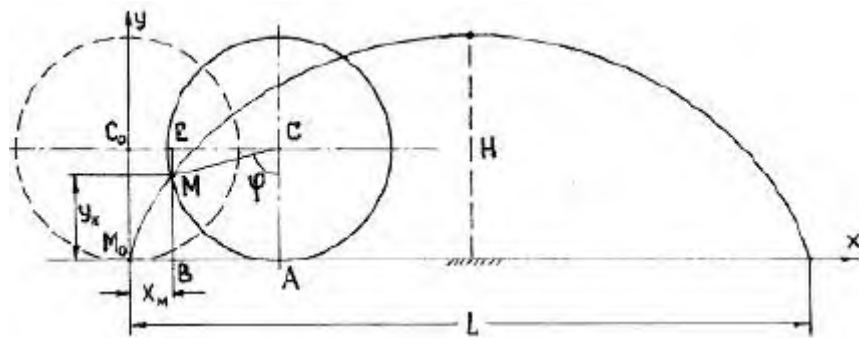
$$V_r = \frac{d\rho}{dt} = \frac{ab\omega(b^2 - a^2)\sin 2\omega t}{2(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1.5}},$$

$$V_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega = \frac{\omega \cdot a \cdot b}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{0.5}}$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2}$$

Рассмотрим методику решения задач, в которых движение точки задано координатным способом. Уравнения (1) определяются либо из геометрических условий, либо в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения точки. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки рассматривается в разделе “Динамика точки”. Получение уравнений (1) с использованием геометрии движения рассмотрим на примере исследования движения точки обода колеса.

Пример 2. Найти уравнения движения точки M обода колеса радиуса R вагона, который движется по прямолинейному участку пути со скоростью V . Колесо катится без скольжения. Точка M в начальный момент движения соприкасалась с рельсом, т.е. занимала положение M_0 (рис. 3).



Решение. Изобразим на расчетной схеме (рис.3) оси координат x и y , начало координат поместим в начальное положение точки M_0 .

Рассмотрим два положения колеса: в начальный момент $t = 0$ и в текущий момент времени t .

Отметим положение точки M на ободе колеса и положение центра C колеса в момент t , координаты точки: $x_M = M_0B$ $y_M = MB$, .

Расстояние от центра колеса до рельса остается постоянным и равным R ; это значит, что центр C колеса движется по прямой, $C_0C = V \cdot t$ параллельной оси x . За время t центр колеса переместится на расстояние (закон φ равномерного движения точки C), одновременно колесо повернется на угол

Чтобы получить уравнения движения точки M , надо координаты этой точки представить как функции времени.

Из расчетной схемы (рис.3) видно, что

$$x_M = C_0C - EC \quad y_M = BE - ME ,$$

или

$$x_M = V \cdot t - EC \quad y_M = R - ME , .$$

Из треугольника MEC имеем;

$$ME = R \sin(90^\circ - \varphi) = R \cos \varphi ,$$

$$EC = R \cos(90^\circ - \varphi) = R \sin \varphi ,$$

$$\text{Тогда } x_M = V \cdot t - R \sin \varphi , \quad y_M = R - R \cos \varphi \quad (12)$$

от Найдём зависимость угла

времени t : так как колесо катится без скольжения,

то длина дуги AM окружности обода колеса (рис.3) равна длине отрезка M_0A .

$$\text{При этом } M_0A = C_0C = V \cdot t ,$$

но длина дуги AM равна также произведению радиуса R на центральный угол φ ;

$$\text{поэтому } Vt = R\varphi , \text{ отсюда } \varphi = \frac{V}{R}t .$$

Теперь уравнения (12) будут иметь вид

$$x_M = V \cdot t - R \sin\left(\frac{V}{R}t\right); \quad y_M = R - R \cos\left(\frac{V}{R}t\right).$$

Полученные уравнения представляют собой уравнения движения точки M . В аналитической геометрии показано, что это параметрические уравнения циклоиды (параметром в данном случае является время t). Таким образом, траектория точки обода колеса, движущегося по прямолинейному участку пути без проскальзывания, является циклоидой. Длина одной ветви циклоиды L (рис. 3) равна $2\pi R$, высота – $H = 2R$.

Пример 3. Даны уравнения движения точки:

$$x = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t; \quad y = 6 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t \quad (\text{где } x, y - \text{ в метрах, } t - \text{ в секундах}). \quad (13)$$

1. Определить уравнение траектории и построить ее.
2. Определить начальное положение точки на траектории.
3. Указать моменты времени, когда точка пересекает оси координат.
4. Найти закон движения точки по траектории $s = s(t)$, принимая за начало отсчета расстояний начальное положение точки.
5. Построить график движения точки.

Решение.

1. Для получения уравнения траектории вида $F(x, y) = 0$ исключим из уравнений движения (13) время t : из первого уравнения системы (13) найдем

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} t = \frac{1-x}{2},$$

подставляя это выражение во второе уравнение той же системы, получим уравнение траектории

$$y = x + 5.$$

Это – уравнение прямой линии. Для построения прямой представим ее уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

, где a – отрезок, отсекаемый прямой на оси x , b – отрезок, отсекаемый прямой на оси y . В данном случае $a = -5$ м, $b = 5$ м. Откладываем на оси x отрезок $a = -5$ м, по оси y – отрезок $b = 5$ м. Через полученные точки проводим прямую (рис. 4).

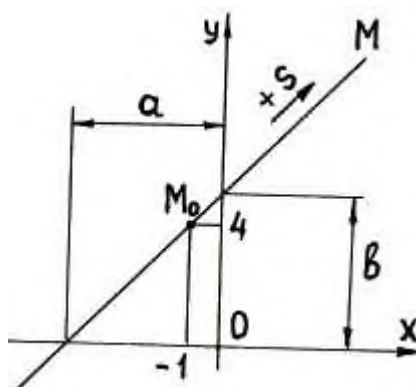


Рис. 4

2. Для определения положения точки в начальный момент времени необходимо

$$x = 1 - 2\cos^2 0 = 1 - 2 = -1 \quad \text{подставить значение } t = 0 \text{ в уравнения движения (13) м;}$$

$$y = 6 - 2\cos^2 0 = 6 - 2 = 4 \quad \text{м.}$$

Точка при $t = 0$ занимает положение $M_0(-1;4)$.

3. В момент пересечения точкой оси y координата x равна нулю, а первое уравнение системы (13) примет вид:

$$0 = 1 - 2\cos^2 \frac{\pi}{4} t_y$$

Отсюда

$$\cos \frac{\pi}{4} t_y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\pi}{4} t_y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad t_y = 1 + 8n,$$

где $n = 0, 1, 2 \dots$

В момент пересечения точкой оси x координата y равна нулю, а второе уравнение системы (13) примет вид:

$$0 = 6 - 2\cos^2 \frac{\pi}{4} t_x \quad \cos \frac{\pi}{4} t_x = \sqrt{3} > 1$$

или

Но косинус не может быть больше 1. Следовательно, точка не пересекает ось x (см.

об этом также п. 4 решения задачи).

4. Для определения закона движения точки по траектории воспользуемся формулой (8). За начало отсчета координаты s примем начальное положение точки M_0 . Подставляя в уравнения (13) значения $t > 0$, видим, что с выходом из начального положения M_0 координаты точки x и y увеличиваются. Это направление движения точки примем за положительное направление отсчета координаты s (см. стрелку $\xrightarrow{+s}$ на рис.

4), а в формуле (8) оставим знак "плюс":

$$s = + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Учитывая, что

$$\dot{x} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t; \quad \dot{y} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t,$$

получим

$$s = \frac{\pi}{2} \sqrt{2} \int_0^t \sin \frac{\pi}{2} t dt = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} t \Big|_0^t$$

или

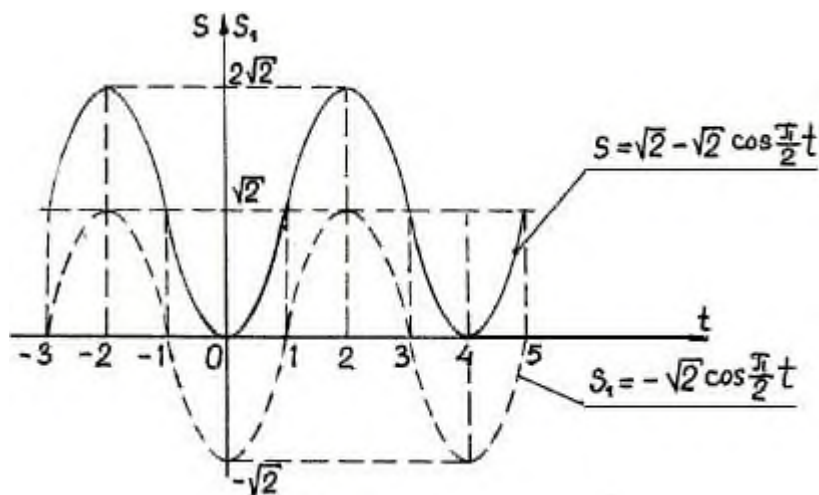
$$s = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} t. \quad (14)$$

Из закона (14) следует, что координата s не может быть отрицательной, т.е. точка движется по полупрямой MoM (рис.4) и ось x не пересекает (см. по этому поводу п. 3 решения примера).

5. График движения точки – это графическое представление зависимости расстояния s от времени t . Для построения такого графика по оси абсцисс откладывают последовательные значения времени t , а по оси ординат – соответствующие им значения расстояния s . Построенные точки соединяют плавной линией.

быстрее, если воспользоваться $s_1 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} t$ вначале построим график функции $\sqrt{2}$ м. график сместим вдоль оси s на

График зависимости (14) можно построить известным графиком косинуса. Для этого (штриховая линия на рис. 5), затем этот величину



Пример 4. Даны уравнения движения точки:

$$x = 5 \cos \frac{3}{2} \pi t - 2,5; \quad y = 5 \sin \frac{3}{2} \pi t + 5$$

(где x, y - в сантиметрах, t - в секундах). (15)

1. Определить уравнение траектории и построить ее.
2. Определить начальное положение точки на ее траектории.
3. Найти закон движения точки по траектории $s = s(t)$, принимая за начало отсчета расстояний начальное положение точки.

4. Определить время T прохождения точкой полной окружности.

Решение.

1. Чтобы найти уравнение траектории точки необходимо из уравнений движения (15) исключить время t . Для этого уравнения движения (15) разрешим относительно

$$5 \cos \frac{3}{2} \pi t \quad \text{и} \quad 5 \sin \frac{3}{2} \pi t$$

$$5^2 \left(\cos \frac{3}{2} \pi t \right)^2 = (x + 2,5)^2,$$

$$5^2 \left(\sin \frac{3}{2} \pi t \right)^2 = (y - 5)^2,$$

и возведем полученные результаты в квадрат

сложим эти уравнения и после преобразования получим

$$(x + 2,5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2.$$

Это уравнение окружности радиуса $R = 5$ см, центр окружности расположен в точке $C(-2,5; 5)$ (рис. 6).

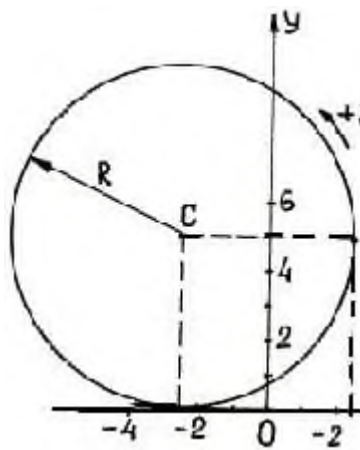


Рис. 6

2. Для определения начального положения точки подставим значение времени $t=0$ в уравнения (15)
 $x_0 = 5 \cos 0 - 2,5 = 2,5$
 $y_0 = 5 \sin 0 - 5 = -5$
 Точка при $t = 0$ см; $y_0 = 5 \sin 0 - 5 = -5$ см; занимает положение $M_0(2,5; -5)$.

3. Для определения закона движения точки по траектории воспользуемся формулой (8). За начало отсчета координаты s примем точку M_0 . Из системы уравнений (18) видно, что с увеличением времени t от нуля x уменьшается, а y увеличивается.

Такое возможно, если после выхода из начального положения точка будет двигаться по окружности против часовой стрелки. Это направление движения точки примем за положительное направление отсчета координаты s (см. стрелку $\xrightarrow{+s}$ на рис. 6), а в формуле (8) перед интегралом оставим знак "плюс":

$$\dot{x} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t; \quad \dot{x} = -5 \frac{3}{2} \pi \sin \frac{3}{2} \pi; \quad \dot{y} = -5 \frac{3}{2} \pi \cos \frac{3}{2} \pi.$$

, где

Отсюда

$$s = \frac{15}{2} \pi \int_0^t dt; \quad s = \frac{15}{2} \pi t. \quad (16)$$

4. Определим время T прохождения точкой полной окружности. T – время, по истечении которого s в формуле (16) станет равным длине окружности $2\pi R$:

$$2\pi R = \frac{15}{2} \pi T.$$

Отсюда $T=4/3$ с.

Пример 5. Даны уравнения движения точки:

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{2} t; \quad y = t \quad (\text{где } x, y - \text{ в метрах, } t - \text{ в секундах}). \quad (17)$$

1. Определить уравнение траектории точки.
2. Определить скорость и ускорение точки при $t = 0$ и $t = 1$ с.
3. Построить траекторию и указать полученные векторы скорости и ускорения на чертеже.

Решение:

1. Уравнение траектории получается подстановкой в первое уравнение (17) величины $t = y$ системы, полученной из второго уравнения этой системы:

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{2} y. \quad (18)$$

2. Модуль скорости точки определяется по формуле $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$ – проекции вектора скорости на координатные оси. Для заданного движения (17) имеем

$$V_x = -\frac{3}{2} \pi \sin \frac{\pi}{2} t, \quad V_y = 1 \text{ м/с.}$$

$$\text{При } t = 0: \quad V_{0x} = -\frac{3}{2} \pi \sin 0 = 0, \quad V_{0y} = 1$$

$$\text{Модуль скорости } V_0 = 1 \text{ м/с.} \quad \text{м/с.}$$

При $t = 1$ сек.:

Модуль скорости

Модуль ускорения определяется по

где $a_x = \ddot{x}$

, $a_y = \ddot{y}$ – проекции

ускорения на координатные оси. Для заданного движения

(17)

имеем

$$a_x = -\frac{3}{4}\pi^2 \cos \frac{\pi}{2}t,$$

$$a_y = 0.$$

При $t = 0$:

$$a_{0x} = -\frac{3}{4}\pi^2 = -7,4 \text{ м/с}^2, \quad a_{0y} = 0$$

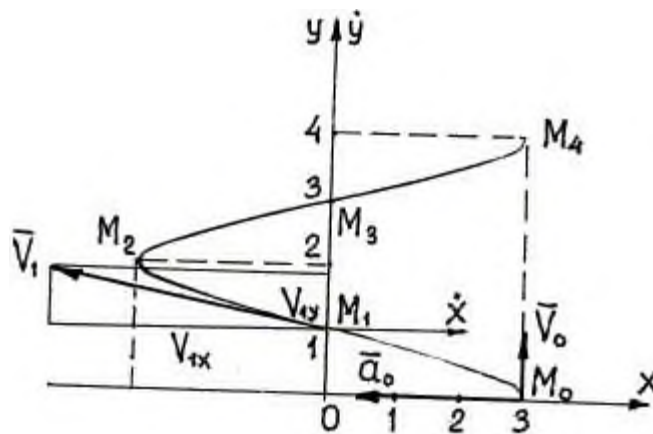
Модуль ускорения $a_0 = 7,4 \text{ м/с}^2$.

При $t = 1 \text{ сек.}$:

$$a_{1x} = -\frac{3}{4}\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad a_{1y} = 0$$

Модуль ускорения $a_1 = 0$.

3. Траектория точки (18) представляет собой косинусоиду.



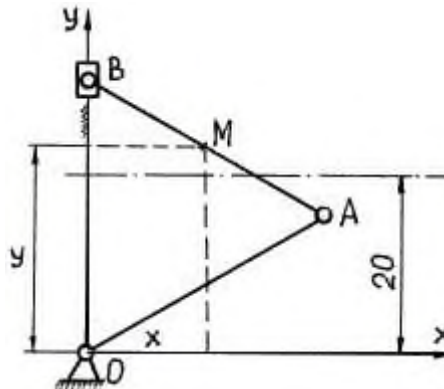
Для построения траектории найдем по уравнению (18) пять точек, задавшись пятью значениями y : $y = 0, 1, 2, 3, 4$, $M_0(3; 0)$, $M_1(0; 1)$, $M_2(-3; 2)$, $M_3(0; 3)$, $M_4(3; 4)$. По этим точкам построена траектория на рис. 7. Определим положение точки в моменты времени $t = 0$ и $t = 1 \text{ с}$, учитывая (17). При $t = 0$ $x_0 = 3 \text{ м}$, $y_0 = 0$, точка занимает положение $M_0(3; 0)$.

При $t = 1 \text{ сек.}$ $x_1 = 0$, $y_1 = 1 \text{ м}$, точка занимает положение $M_1(0; 1)$. Для этих положений точки построим векторы скорости и ускорения. От точки M_0 отложим проекции скорости $V_{0x} = 0$ и $V_{0y} = 1 \text{ м/с}$ (см. п.2); направление вектора $\vec{V}_0$ показано на рис. 7. Вектор скорости построим следующим образом: через точку M_1 проведем оси $M_1\dot{x}$ и $M_1\dot{y}$, ось параллельна оси x , а ось $M_1\dot{y}$ совпадает с осью y . Вдоль этих осей от точки M_1 отложим отрезки, равные проекциям V_{1x} и V_{1y} (с учетом их знаков); затем построим прямоугольник, диагональ которого есть вектор $\vec{V}_1$. Модуль вектора ускорения $\vec{a}_0$ равен модулю проекции a_{0x} (см. п. 2), $\vec{a}_0$ направлен от точки M_0 в сторону,

противоположную положительному направлению оси x (скорости, должны совпадать с $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ касательными к траектории соответственно в точках M_0 и M_1 . Вектор $\vec{a}_0$ должен быть направлен от точки M_0 внутрь кривой).

Пример 6. Даны уравнения движения точки M шатуна AB кривошипно-ползунного механизма (рис. 8): $x = 20 \cos 2\pi t$ $y = 40 \sin 2\pi t$; (где x, y - в метрах, t - в секундах).

1. Определить уравнение траектории точки.
2. Определить скорость и ускорение точки в момент, когда она пересечет прямую $y = 20$ см.



Решение.

1. Чтобы определить уравнение траектории, следует исключить время из уравнений движения (21). Учитывая, что

$$\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t = 1,$$

$$\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1.$$

получим

Траектория представляет собой эллипс с полуосями 20 см и 40 см.

2. Определим время T , когда точка пересечет прямую $y = 20$ см, первое уравнение системы (21) в этот момент примет вид: $20 = 40 \sin 2\pi T$, откуда следует $\sin 2\pi T = 1/2$

$$; \quad 2\pi T = \pi/6 \quad T = 1/12 \quad ; \quad \text{сек.}$$

Найдем

$$T = 1/12 \quad \text{с:}$$

$$V_x = -40\pi \sin \frac{\pi}{6} = -20\pi \text{ см/с}$$

$$V_y = -80\pi \cos \frac{\pi}{6} = 40\sqrt{3}\pi \text{ см/с.}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 224 \text{ см/с.}$$

величины

скорости и

ускорения по

значениям их

проекций в момент времени

Определим проекцию скорости на касательную $V_{\tau} = \dot{s}$, учитывая (22),

$$V_r = 3t^2 - 45t + 162 \quad (23)$$

При $t = 0$, $V_{r0} = 162 \text{ см/с}$ и $t_1 = 10 \text{ с}$, $V_{r1} = 12 \text{ см/с}$.

Теперь отложим найденные проекции скорости из точек M_0 и M_1 по соответствующим касательным: V_{r0} – по касательной τ_1 . V_{r0}, V_{r1} – по касательной – по τ_0, τ_1 .

Векторы $\vec{a}_0, \vec{a}_1$ и совпадают со своими проекциями и

Определим проекции ускорения на естественные оси координат, учитывая (22),

$$a_r = \ddot{s} = (6t - 45) \text{ см/с}^2; \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(3t^2 - 45t + 162)}{500} \text{ см/с}^2.$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2}.$$

Ускорение точки

При $t = 0$: $a_{r0} = -45 \text{ см/с}^2$; $a_{n0} = \frac{162^2}{500} = 52,48 \text{ см/с}^2$;

$$a_0 = \sqrt{(-45)^2 + 52,48^2} = 69,3 \text{ см/с}^2.$$

При $t_1 = 10 \text{ сек.}$: $a_{r1} = 15 \text{ см/с}^2$; $a_{n1} = \frac{144^2}{500} = 0,29 \text{ см/с}^2$;

$$a_1 = \sqrt{15^2 + 0,29^2} = 15 \text{ см/с}^2.$$

Отложим из точек M_0 и M_1 по естественным осям проекции $a_{r0}, a_{n0}, a_{r1}, a_{n1}$.

Векторы $\vec{a}_0, \vec{a}_1$ изображаются диагоналями прямоугольников, построенных на проекциях ускорений.

2. Чтобы найти моменты остановки, необходимо найти время t^* , когда скорость точки равна нулю. Из уравнения (23) получим

$$3(t^*)^2 - 45t^* + 162 = 0.$$

Решив это уравнение, будем иметь $t_1^* = 6 \text{ с}$, $t_2^* = 9 \text{ с}$.

3. Поскольку за 10 с точка сделала две остановки (см. п. 2), пройденный ею путь за 10 с можно найти как сумму пути, пройденного точкой от начального положения до первой остановки, пути, пройденного точкой от первой до второй остановки, и пути, пройденного точкой от второй остановки до момента времени $t_1 = 10 \text{ с}$, т.е.

$$H = |s_1^* - s_0| + |s_2^* - s_1^*| + |s_1 - s_2^*|,$$

$$s_1^* = 6^3 - 22,5 \cdot 6^2 + 162 \cdot 6 - 15 = 363$$

$$s_2^* = 9^3 - 22,5 \cdot 9^2 + 162 \cdot 9 - 15 = 349,5$$

$$s_1 = 10^3 - 22,5 \cdot 10^2 + 162 \cdot 10 - 15 = 355$$

где $s_0 = -15$ см; см; см; см.

Путь, пройденный точкой за 10 сек, равен

$$II = |363 + 15| + |349,5 - 363| + |355 - 349,5| = 397 \text{ см.}$$

Пример 9.

По заданным уравнениям движения точки:

$$x = \sqrt{3} \cos t - \sin t, \quad y = \cos t - \sqrt{3} \sin t \quad (\text{где } x, y - \text{ в метрах, } t - \text{ в секундах}).$$

(24)

найти ее касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны

траектории для заданного момента времени $t_1 = 0,5\pi$ сек.

Решение:

Заданные уравнения движения точки (24) позволяют найти проекции скорости

точки, м/с,

$$V_x = \dot{x} = -\sqrt{3} \sin t - \cos t;$$

$$V_y = \dot{y} = -\sin t - \sqrt{3} \cos t.$$

Модуль скорости, м/с,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3} \sin 2t} \quad (25)$$

$$t_1 = 0,5\pi$$

В момент времени

сек.: $V_1 = 2$ м/с. Проекция

$$a_x = \ddot{x} = -\sqrt{3} \cos t + \sin t \quad \text{ускорения точки, м/с}^2:$$

$$a_y = \ddot{y} = -\cos t + \sqrt{3} \sin t;$$

Модуль полного ускорения, м/с²

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \sin 2t} \quad (26) \text{ сек.: } a$$

В момент времени $t_1 = 0,5\pi$ = 2 м/с².

Зная выражение скорости, как функции времени t (25), определим модуль касательного ускорения точки, м/с², по формуле (5)

$$a_{\tau} = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \frac{2\sqrt{3} \cos 2t}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3} \sin 2t}}. \quad (27)$$

м/с².

По полному ускорению (26) и касательному ускорению (27) найдем модуль сек., учитывая формулу (7)

В момент $t_1 = 0,5\pi$ сек.: для $a_{\tau 1} = \sqrt{3}$

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение a_{n1} и

2

радиус кривизны траектории ρ_1 связаны

зависимостью (6), из которой следует, что при $t_1 = 0,5\pi$ сек.:

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = 4 \text{ м}.$$

Пример 10. Даны уравнения движения точки в плоскости xOy :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(где x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1=1$ сек. найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Указания. Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t . Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \quad (28)$$

Из уравнения движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (28). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

следовательно,

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. 11):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (29)$$

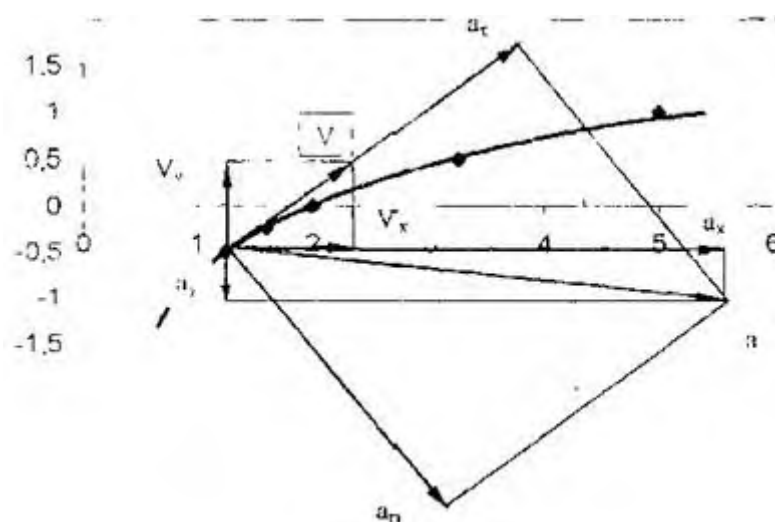


Рис. 11

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right); \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_{1x} = 1,11 \text{ см/с}, \quad V_{1y} = 0,73 \text{ см/с}, \quad V_1 = 1,33 \text{ см/с}$$

и при $t=1\text{с}$

(30) 3. Аналогично найдем ускорение точки

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t = 1$ $a_{1x} = 0,87 \text{ см/с}^2$, $a_{1y} = -0,12 \text{ см/с}^2$, $a_1 = 0,88 \text{ см/с}^2$

сек.

(31)

4 Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

$$2V \frac{dV}{dt} = 2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt} \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

Получаем (32) и

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (32), определены и даются равенствами (30) и (31). Подставив в (32) эти числа, найдем, что при $t = 1$ сек. $a_{1r} = 0,66$ см/с².

5. Нормальное ускорение точки. Подставив сюда найденные числовые значения a_1 и a_{1r} , получим, что при сек. $t = 1$ $a_n = 0,58$ см/с².

6. Радиус кривизны траектории. Подставляя сюда числовые значения V и a_n , найдем, что при сек. $t = 1$ $\rho = 3,05$ см.

Ответ: $V = 1,33$ см/с, $a_1 = 0,88$ см/с², $a_{1r} = 0,66$ см/с², $a_n = 0,58$ см/с², $\rho = 3,05$ см.

Пример 11. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

(s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ (рис.12). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ сек.

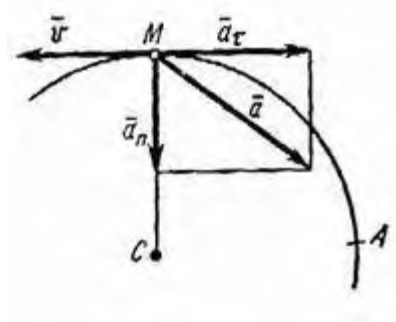


Рис.12

Решение.

Определяем скорость точки

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1$ сек. получим $V_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1,11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим

м:

сек.

$$a_r = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}$$

При $t_1 = 1$ сек. получим, учтя, что $R = 2$

$$a_{1r} = -\pi^2 \sqrt{2}/16 = 0,87 \text{ м/с}^2$$

$$a_{1n} = V_1^2 / R = \pi^2 / 16 = 0,62 \text{ м/с}^2$$

на

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1$

$$a_1 = \sqrt{a_{1r}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2 \sqrt{3}/16 = 1,07 \text{ м/с}^2$$

будет

Пример 12. По заданному уравнению движения точки M

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \quad (\text{где } \vec{r} - \text{в см})$$

Установить вид ее траектории и для

момента $t_1 = 1$ сек. найти положение точки траектории, ее скорость и ускорение.

Решение:

Определяем вид траектории движения точки M . Движение точки M задано векторным способом

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \quad (33)$$

Выберем систему отсчета $хоу$ (рис. 13).

Построим векторы $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$, подставляя время $t_0 = 0$ сек., $t_1 = 1$ сек., $t_2 = 2$ сек. в

(33)

$$\vec{r}_0(t_0=0) = 2 \cdot 0 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = 3 \cdot \vec{j},$$

$$\vec{r}_1(t_1=1) = 2 \cdot 1 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j},$$

$$\vec{r}_2(t_2=2) = 2 \cdot 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$$

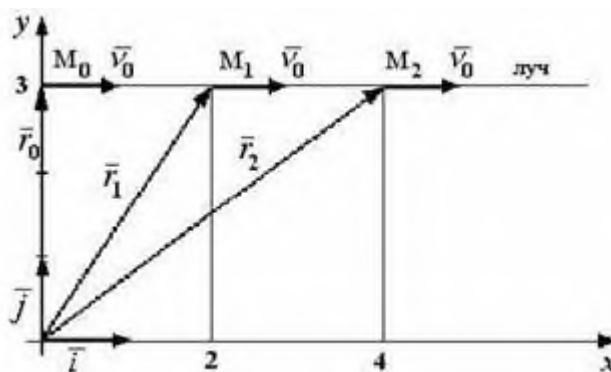


Рис. 13

Соединяя концы радиусов-векторов, получим траекторию точки M .

Рисунок показывает, что траекторией движения является луч, параллельный оси x , с началом в точке M_0 .

Положение точки M на траектории при $t_1 = 1$ сек. определяет радиус-вектор $\vec{r}_1 = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$.

Скорость точки M находим по формуле

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot t \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) = 2 \cdot \vec{i} \text{ см/с}$$

Величина скорости

$$v = v_0 = 2$$

см/с = const - означает, что движение точки равномерное.

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} \text{ см/с}$$

- вектор скорости $\vec{v}$ параллелен оси X и совпадает с ее

положительным направлением (рис. 15).

Ускорение точки M

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{const}) = 0$$

Ответ: точка совершает прямолинейное равномерное движение.

Пример 13. По заданным уравнениям движения точки M

$$x = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \quad y = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 4, \quad (\text{где } x, y - \text{в см})$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t_1 = 1$ сек. найти положение точки на траектории, ее скорость, ускорение.

Решение:

Определяем вид траектории.

$$x = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right), \quad y = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 4$$

Движение точки M задано координатным способом

(34)

Исключая время из уравнений движения (34), найдем вид траектории точки M в координатной форме.

Так как время t входит в аргументы тригонометрических функций синуса и косинуса, то, используя формулу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ получим}$$

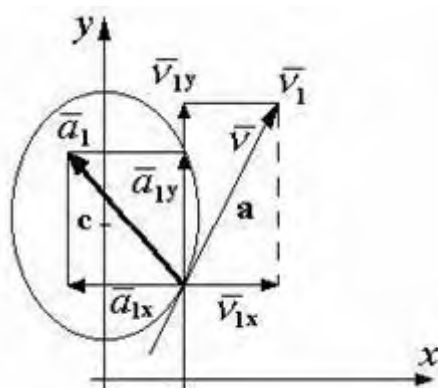
$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) &= \frac{x}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) &= \frac{4-y}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 \rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-y}{3}\right)^2 = 1 - \text{уравнение эллипса}$$

Траекторией движения точки M является эллипс (рис. 14). Центр эллипса C имеет координаты

$$x = 0, 4 - y = 0 \rightarrow x_c = 0, y_c = 4.$$

Полуоси эллипса $a = 2$ см, $b = 3$ см.



Масштаб:

1 см : 1 см / с

1 см : 1 см / с²

Определяем положение точки на траектории при $t_1 = 1$ сек.

Подставляя время $t_1 = 1$ сек. в (34), получим

$$x_1 = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,73 \text{ см}$$

$$y_1 = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) + 4 = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 = -3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 2,5 \text{ см}$$

Точку с координатами x_1, y_1

Скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}, \quad \text{где}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \right] = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 4 \right] = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3}.$$

обозначим на траектории через M_1 .

точки M определим через ее проекции на координатные оси.

Тогда

$$v = \frac{\pi}{3} \sqrt{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

Так как величина скорости v неравномерное.

зависит от времени t , то движение точки

При $t_1 = 1$ сек.

$$v_1 = \frac{\pi}{3} \sqrt{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)} = \frac{\pi}{3} \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx 2,32 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

$$v_{1x} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 1,05 \frac{\text{см}}{\text{сек}} > 0$$

$$v_{1y} = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 2,72 \frac{\text{см}}{\text{сек}} > 0$$

Построим на рис.14 вектор скорости точки M_1 .

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \cdot \vec{i} + v_{1y} \cdot \vec{j} \quad \text{или} \quad \vec{v}_1 = 1,05 \cdot \vec{i} + 2,72 \cdot \vec{j}$$

В точке M_1 параллельно осям x, y , в выбранном масштабе, откладываем

$$v_{1x} = 1,05 > 0,$$

$$v_{1y} = 2,72 > 0$$

Вектор $\vec{v}_1$ - диагональ прямоугольника, построенного на $\vec{v}_{1x}$ и $\vec{v}_{1y}$, как на

сторонах.

Контроль: вектор скорости $\vec{v}_{1x}$ должен лежать на касательной, проведенной к эллипсу в точке M_1 .

$\vec{a}$ точки M находим аналогично, то есть

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2,$$

$$a = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 9 \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot 2,29 = 2,51 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

$$a_{1x} = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = -1,19 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2},$$

$$a_{1y} = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1,6 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

$\vec{a}_1$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Ускорение

Построим на рис. 14 вектор ускорения .

$$\left. \begin{array}{l} a_{1x} = -1,05 < 0 \\ a_{1y} = 1,6 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a}_1 = a_{1x} \cdot \vec{i} + a_{1y} \cdot \vec{j}$$

В точке M_1 параллельно осям X и Y отложим

Вектор $\vec{a}_1$ - диагональ прямоугольника, построенного на $\vec{a}_{1x}$ $\vec{a}_{1y}$, как на сторонах.

Контроль: вектор ускорения должен лежать в плоскости траектории и направлен в сторону ее вогнутости.

Ответ: точка M совершает криволинейное в данный момент ускоренное движение, т.к. угол между векторами $\vec{v}_{1x}$ $\vec{a}_1$ и острый.

Пример 14. Даны уравнения движения точки M в плоскости xOy :

$$x = 4t^2 + 2, \quad y = 2t \quad (\text{где } x, y - \text{ в сантиметрах, } t - \text{ в секундах}).$$

Найти уравнение траектории точки M ; для момента времени $t_1 = 1$ сек. найти положение точки на траектории, ее скорость, полное ускорение, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны в соответствующей точке.

Решение:

1. Исключая время t из уравнений движения

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \cdot t^2 + 2 \\ y = 2 \cdot t \end{array} \right\} \quad (35)$$

найдем уравнение траектории.

Из второго уравнения подставляя это значение t в первое уравнение, получим

$$x = 4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2 \quad \text{или} \quad x = y^2 + 2 \quad - \text{уравнение параболы.}$$

Заметим, что траекторией движения является только верхняя ветвь параболы, т.к.

время $t > 0$ и

$$y = 2 \cdot t > 0$$

значения

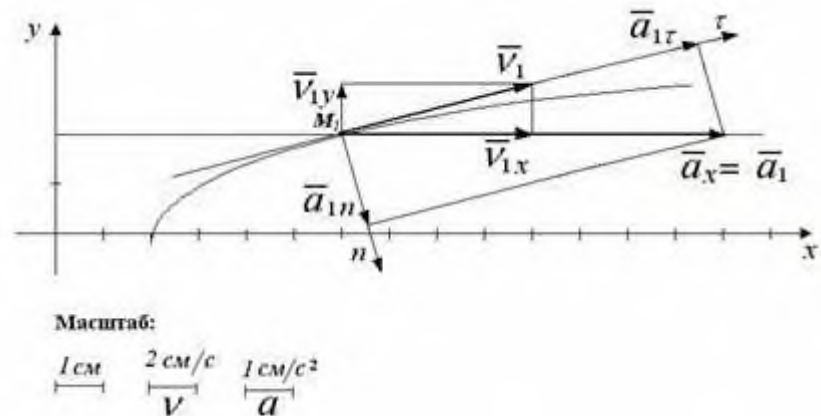


Рис.15

2. Полагая время $t_1 = 1$ сек., в уравнениях (35) найдем координаты, определяющие положение точки на траектории в этот момент времени

$$x_1 = x(t=1\text{с}) = 4 + 2 = 6 \text{ см}$$

$$y_1 = y(t=1\text{с}) = 2 \text{ см}$$

Точку с координатами $x_1 = 6$, $y_1 = 2$ на траектории обозначим M_1 .

3. Величину скорости точки M найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \text{ где}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2 + 2) = 8t \text{ см/с}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2t \text{ см/с}$$

Тогда

$$v = \sqrt{64t^2 + 4} \text{ см/с}$$

Поскольку величина скорости зависит от времени t , то движение точки неравномерное.

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$v_{1x} = 8 \text{ см/с}$$

$$v_{1y} = 2 \text{ см/с}$$

$$v_1 = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \approx 8,2 \text{ см/с}$$

Выберем масштаб и построим вектор скорости в положении M_1 по составляющим

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1x} + \vec{v}_{1y} = 8 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{1x} = 8 \cdot \vec{i}, \quad \vec{v}_{1y} = 2 \cdot \vec{j}$$

- диагональ прямоугольника, сторонами которого являются

Причем, вектор скорости $\vec{v}_{1x}$ должен по направлению совпадать с касательной, проведенной к траектории в точке M_1 .

4. Модуль ускорения точки M определяем аналогично

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \text{ где}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(8t)}{dt} = 8 \text{ см/с}^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0$$

Полное ускорение

$$a = a_x = 8 \text{ см/с}^2$$

является постоянным во все время движения точки.

Выберем масштаб, построим вектор ускорения (рис.15):

$$\vec{a}_1 = \vec{a} = \vec{a}_x \quad \vec{a}_1 = 8 \cdot \vec{i},$$

Вектор ускорения должен лежать в плоскости траектории и направлен в сторону ее вогнутости.

5. Проведем через точку M_1 (рис.15) ось $M_1\tau$ вдоль касательной и ось M_1n – вдоль нормали в сторону вогнутости траектории.

Разложим полное ускорение на составляющие вдоль этих осей

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1n} + \vec{a}_{1\tau}, \text{ где}$$

$\vec{a}_{1\tau}$ - касательное ускорение точки M ;

$\vec{a}_{1n}$ - нормальное ускорение точки M .

Из рисунка $a_n \approx 2 \text{ см/с}^2, a_{1\tau} \approx 8 \text{ см/с}^2$

Аналитически касательное ускорение определяется по формуле

$$a_{1\tau} = \frac{dv}{dt}$$

и характеризует изменение скорости по величине.

Если $\frac{dv}{dt} > 0$ – движение ускоренное,

Если $\frac{dv}{dt} < 0$ – движение замедленное.
 Найдем a_r

$$a_r = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{64t^2 + 4} \right) = \frac{1 \cdot 64 \cdot 2t}{2 \cdot \sqrt{64t^2 + 4}} = \frac{64t}{\sqrt{64t^2 + 4}}$$

Т.к. время $t > 0$, выражение $\frac{64t}{\sqrt{64t^2 + 4}} > 0$, следовательно, движение точки M ускоренное.

В момент $t_1 = 1$ сек.

$$a_{1r} = \frac{64}{\sqrt{64 + 4}} = \frac{64}{8,2} \approx 7,8 \text{ см/с}^2 (\approx 8 \text{ см/с}^2 \text{ соответствует значению на рисунке}).$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. В случае

криволинейного движения, оно всегда существует и определяется по формуле $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Т.к. радиус кривизны параболы в точке M_1 не известен, то величину нормального ускорения можно определить следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2}$$

В момент $t_1 = 1$ сек.

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1r}^2} = \sqrt{64 - 60,84} \approx 1,8 \text{ см/с}^2 (\approx 2 \text{ см/с}^2 \text{ соответствует значению на рисунке}).$$

Радиус кривизны параболы в точке M_1 найдем из выражения

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = \frac{68}{1,8} \approx 37,8 \text{ см}$$

Заметим, что совпадение величин $a_1 = \sqrt{a^2 - a_r^2}$, $a_2 = \sqrt{a^2 - a_r^2}$ найденных на рис.15 с их значениями полученными аналитически подтверждает, что задача решена верно.

Ответ: точка M совершает криволинейное ускоренное движение, т.к. вектор касательного ускорения во все время движения совпадает с направлением вектора скорости.

Пример 15. Точка M движется по окружности радиуса $R = 2 \text{ м}$ по

$$S = 2 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) \text{ м.}$$

Найти скорость $\vec{v}$ закону

и ускорение $\vec{a}$ точки M в момент времени $t_1 = 1$ сек.
 Установить вид движения точки M в этот момент времени.

Решение:

Траектория движения точки M – окружность радиуса $R = 2 \text{ м}$.

Воспользуемся естественным способом задания движения точки. Выберем на траектории какую-нибудь неподвижную точку O (рис.16), которую примем за начало отсчета, и укажем на траектории положительное и отрицательное направления отсчета. Положение точки M на траектории определим дуговой координатой S , которая с течением времени будет изменяться по закону

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right) \quad (36)$$

1) Установим, где находится точка M на окружности в момент времени t_1 .

сек., Полагая в уравнении (36) $t_1 = 1$ получим $S_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$
 м. $\angle OCM_1 = \alpha = \frac{S_1}{R} = \frac{\pi}{2} > 0$

Знак плюс означает, что угол α Тогда надо отложить в сторону положительного

отсчета S . На траектории получим точку M_1 . Через точку M_1 проведем ось $M_1\tau$ по касательной к траектории в сторону положительного отсчета S ; ось $\bar{a}_{1\tau}$ - по нормали к траектории и направленную в сторону вогнутости траектории.

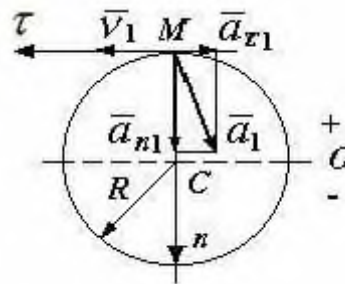


Рис.16

2) Определим скорость точки M .

$$v = \frac{dS}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) \text{ м/с}$$

В момент $t_1 = 1$ сек.

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{3}}{6} \approx 2,8 \text{ м/с} > 0$$

Знак плюс означает, что $\bar{v}_1$ откладываем вдоль касательной влево.

3) Ускорение точки M находим через его касательную $\bar{a}_\tau$ и нормальную $\bar{a}_n$ составляющие.

Касательное ускорение

$$a_r = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{3} \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^3}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \text{ м/с}^2$$

- радиус кривизны окружности,

Нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$, где ρ
 $\rho = R = 2$ м.

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$a_{r1} = -\frac{\pi^3}{18} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^3}{36} = -0,86 \text{ м/с}^2 < 0$$

$\bar{a}_{r1}$

Знак минус означает, что
откладываем вдоль касательной
вправо, в сторону отрицательного

отсчета S.

$$a_{n1} = \frac{2,8^2}{2} = 3,92 \text{ м/с}^2.$$

$\bar{a}_{n1}$

откладываем вдоль нормали, в сторону вогнутости

траектории. Ускорение точки M

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_{n1} + \bar{a}_{r1},$$

$$a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{r1}^2} = \sqrt{0,86^2 + 3,92^2} \approx 4,01 \approx 4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: точка M совершает криволинейное, в данный момент замедленное движение, т.к. вектор скорости $\bar{v}_1$ и касательное ускорение $\frac{dv}{dt} = -0,86$ не совпадают по направлению.

Пример 16. По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1 = 0,5$ сек. найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = -2t^2 + 3 \quad y = -5t;$$

Решение.

Исходные данные в см и сек:

$$\begin{aligned} x &= -2t^2 + 3; \\ y &= -5t; \end{aligned} \quad (37)$$

$$t_1 = 0,5 \text{ сек.}$$

Уравнения движения (37) являются параметрическими уравнениями траектории точки M. Чтобы получить уравнение траектории в обычной координатной форме, исключим время t из уравнений движения. Тогда

$$25x + 2y^2 = 75 \quad (38)$$

Это уравнение параболы.

Для определения скорости точки находим проекции скорости на оси координат:

$$V_x = \dot{x} = -4t \text{ см/с}; \quad V_y = \dot{y} = -5 \text{ см/с.}$$

Модуль скорости точки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (39)$$

Аналогично проекции ускорения точки

$$a_x = \ddot{x} = -4 \text{ см/с}^2; \quad a_y = \ddot{y} = 0$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение находим путем дифференцирования модуля скорости (39)

$$a_\tau = \left| \frac{dV}{dt} \right|,$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

При $t = 0,5$ с $x = -2 \times 0,5^2 + 3 = 2,5$ см, $y = -5 \times 0,5 = -2,5$ см.
 $V_x = -4 \times 0,5 = -2$ см/с, $V_y = -5$ см/с, $V = 5,38$ см/с. $a_x = -4$ см/с², $a_y = 0$, $a = 4$ см/с²

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-2 \cdot (-4) + (-5) \cdot 0}{5,38} = 1,487 \text{ см/с}^2$$

Модуль касательного ускорения

$$a_\tau = 1,487 \text{ см/с}^2$$

Знак "+" при $\frac{dV}{dt}$ показывает, что движение точки ускоренное и, следовательно, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{V}$ направления совпадают.

Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4^2 - 1,487^2} = 3,71 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в той точке, где при $t = 0,5$ с находится точка М:

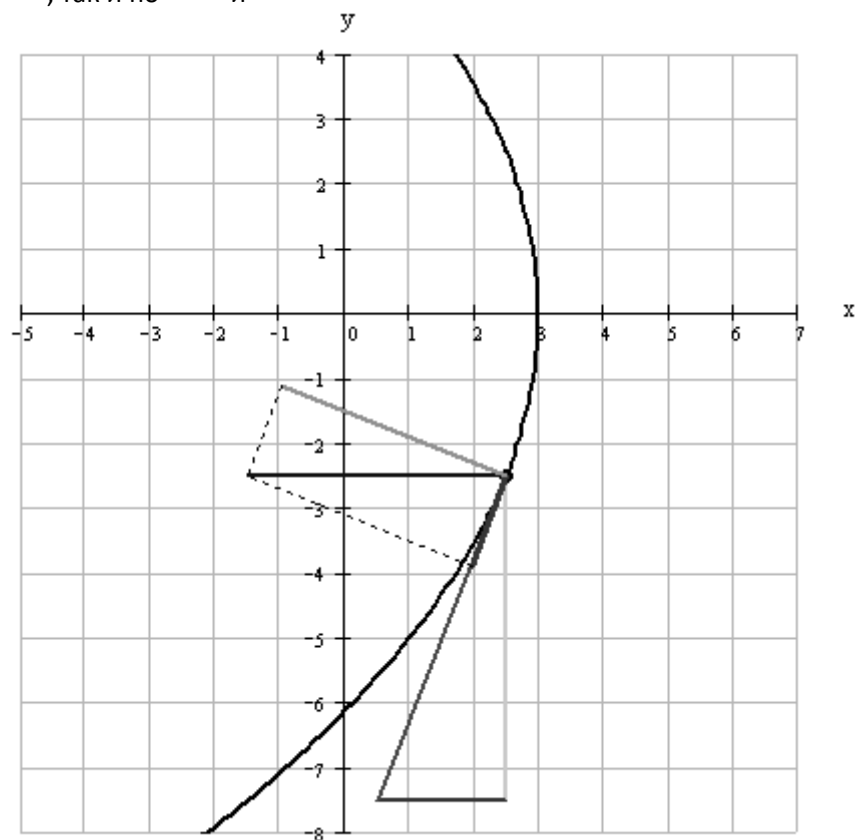
$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5,38^2}{3,71} = 7,81 \text{ см.}$$

Пользуясь уравнением (38), строим траекторию (рис.17) и показываем на ней положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{V}$ строим по составляющим $\vec{V}_x$ и $\vec{V}_y$, причем он направлен по касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ находим как

$$\vec{a}_x \text{ и } \vec{a}_y, \text{ так и по } \vec{a}_n = v^2/\rho.$$

точки.

по



составляющим

Рис. 17

Пример 17. По дуге радиусом $r=1200$ м движется поезд (рис.18), его скорость в начале движения по дуге составляет $v_0=60$ км/ч. После того как поезд прошел расстояние 800 м, его скорость уменьшилась до 36 км/ч. Определить полное ускорение в начале и конце движения.

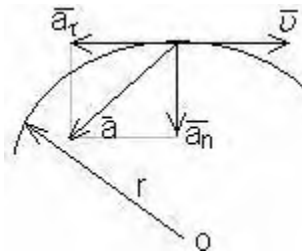


Рис.18

Указание. В задаче рассматривается равнопеременное движение точки. Следует учесть, что при использовании уравнения равнопеременного движения точки $s = v_0 t + (at^2 / 2)$ по криволинейной траектории кроме касательного ускорения a_t , у точки возникает нормальное тангенциальное ускорение $a_n = v^2 / \rho$, направленное по радиусу кривизны траектории к ее центру.

Решение.

Определим касательное ускорение из уравнений:

$$v = v_0 + at \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 + v}{2} t,$$

Из второго уравнения

$$t = \frac{2s}{v_0 + v} = \frac{2 \cdot 800}{\frac{60000}{3600} + \frac{36000}{3600}} = \frac{1600}{16.7 + 10} = 59.9 \text{ с}$$

Из первого уравнения

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10 - 16.7}{59.9} = -0.11 \text{ м/с}^2$$

Так как равномерно замедленное, то касательное ускорение в течении всего времени движения постоянно.

Найдем нормальное ускорение:

$$\text{в начале движения} \quad a_n = \frac{v_0^2}{r} = 16.72 / 1200 = 0.014 \text{ м/с}^2, \text{ в}$$

$$\text{конце движения} \quad a_n = \frac{v^2}{r} = 102 / 1200 = 0.085 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение:

в начале
движения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = \sqrt{0.11^2 + 0.23^2} = 0.256 \text{ м/с}^2$$

в конце движения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = \sqrt{0.11^2 + 0.08^2} = 0.088 \text{ м/с}^2$$

Пример 18. Уравнение движения тела имеет вид $x = 5t + 0,8t^3$. Определить ускорение a_0 и скорость тела v_0 в начальный момент времени, а также среднее ускорение $a_{\text{ср}}$ за первые 5 секунд движения. **Решение.**

Поскольку $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$v = \frac{dx}{dt} = 5 + 0,8 \cdot 3t^2 \quad (1)$$

Далее, из $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ получим

$$a = \frac{dv}{dt} = 2,4 \cdot 2t = 4,8t \quad (2)$$

Подставив в (1) и (2) $t=0$, найдем $v_0=5$ м/с, $a_0=0$ м/с².

Среднее ускорение находим по определению $\vec{a}_{\text{ср.}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, то
есть $a_{\text{ср.}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t}$, где скорость в момент времени $t=5$ с находим из

$$(1): v_t = v_5 = 5 + 2,4 \cdot 5^2 = 65 \text{ м/с. Окончательно } a_{\text{ср.}} = \frac{65 - 5}{5} = 12 \text{ м/с}^2.$$

Пример 19. Начальная скорость брошенного под некоторым углом к горизонту камня равна 10 м/с, а спустя 0,5 с скорость камня равна 7 м/с. На какую максимальную высоту над начальным уровнем поднимется камень?

Решение.

Максимальная высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту, может быть найдена из общей формулы пути при равнопеременном движении в проекции на вертикальную ось

$$h = S_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y}$$

с учетом, что в наивысшей точке траектории отсутствует вертикальная

составляющая скорости $v_y=0$, а $a_y = -g$:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} \quad (1)$$

Неизвестную проекцию начальной скорости на вертикальную ось v_{0y} можно найти из формулы скорости при равнопеременном движении $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ в проекции на вертикальную ось:

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (2)$$

и теоремы Пифагора для полной скорости в начальный момент времени и спустя

время t после начала движения:

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2, \quad (3)$$

$$v^2 = v_{0x}^2 + v_y^2. \quad (4)$$

Здесь учтено, что проекция скорости на горизонтальную ось $v_x = v_{0x} + a_x t$ не изменяется, так как $a_x = 0$.

$$v_0^2 - v^2 = 2v_{0y}gt - (gt)^2. \quad \text{Вычтем почленно (4) из (3), и с учетом (2) получим:}$$

$$v_0^2 - v^2 = 2v_{0y}gt - (gt)^2. \quad (5)$$

Из (5) находим v_{0y} :

$$v_{0y} = \frac{v_0^2 - v^2 + (gt)^2}{2gt} = \frac{10^2 - 7^2 + (9,8 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5} = 7,65 \text{ м/с}$$

Далее из (1) находим высоту подъема:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{7,65^2}{2 \cdot 9,8} = 2,99 \text{ м}$$